APUNTES DE LOGICA

Dep. de Informática. Univ. de Castilla-La Mancha.
Paseo de la Universidad, 4. 13071 Ciudad Real, España.

Dirigirse a
pascual.julian@uclm.es
para comunicar cualquier sugerencia o error detectado.

Primera versión:	Noviembre-1998
Primera revisión:	Enero-2002
Segunda revisión:	Noviembre-2006

Capítulo 1

INTRODUCCION A LA LOGICA

1.1. Qué es la lógica.

Este apartado trata de dar un concepto intuitivo de las materias que conciernen a la lógica (y dentro de ella de las que nos van a interesar a nosotros).

Debemos comenzar diciendo que no hay un acuerdo unánime sobre ciertos temas:

- ¿ Trata la lógica de cómo piensa la gente o de como debería pesar ?.
- ¿ Le interesa principalmente el lenguaje ?.
- ¿ Los lenguajes formales empleados en lógica son modelos del lenguaje natural o pretenden reemplazarlo ?.

1.1.1. De qué trata la lógica.

- En una primera aproximación al tema, podremos dar la siguiente definición:

  > La lógica investiga la relacción de *consecuencia* que se da entre una serie de premisas y la conclusión de un argumento correcto. Se dice que un argumento es *correcto* (válido) si su conclusión *se sigue* o es *consecuencia* de sus premisas; de otro modo es *incorrecto* [6].

- Por un *argumento* entendemos un sistema de enunciados, de un lenguaje determinado. Uno de esos enunciados es designado como la *conclusión* y el resto como las *premisas*.

- Un *enunciado* se define como una expresión lingüistica que establece un pensamiento completo:
  - Interrogativos,
  - Imperativos,
  - Declarativos:
    - Enunciados de acción: sujeto no determinado. Ejemplos: "es verano"; "hace calor".
    - Enunciados de atribución de propiedades a sujetos determinados. Ejemplos: "Luis es alto"; "El verano es caluroso".
    - Enunciados de relación entre sujetos. Ejemplos: "Luis es hermano de Juan" (Relación binaria); "Los Pirineos están entre España y Francia" (Relación Ternaria).

Ejemplo 1 *Una forma tradicional de presentar los argumentos es como se muestra a continuación,*

$$\begin{array}{ll} & \textit{Todos los hombres son mortales;} \\ & \textit{Todos los griegos son hombres;} \\ \hline \triangle & \textit{Todos los griegos son mortales.} \end{array}$$

A nadie la resultará dificíl ver que la conclusión del argumento anterior se sigue de sus premisas. En otros casos se requiere de cierta reflexión, como en

$$\begin{array}{ll} & \textit{Hay exáctamente 136 cajas de naranjas en el almacén;} \\ & \textit{Cada caja contiene al menos 140 naranjas;} \\ & \textit{Ninguna caja contiene más de 166 naranjas;} \\ \hline \triangle & \textit{Hay en el almacén al menos seis cajas que contienen} \\ & \textit{el mismo número de naranjas.} \end{array}$$

En otros casos la cuestión puede ser muy difícil.

$$\begin{array}{ll} & \textit{El número de estrellas es par y menor que cuatro;} \\ \hline \triangle & \textit{El número de estrellas es la suma de dos primos.} \end{array}$$

1.1.2. Corrección, Verdad y Analiticidad.

- La noción de correción de un argumento se formula comunmente en términos de verdad y de **posiblilidad**:

  Un argumento es *correcto* si y solamente si no es **posible** que sus premisas sean **verdaderas** y su conclusión **falsa**.

- Establecer la corrección de un argumento por esta vía, usando los conceptos de verdad y posiblilidad, es una tarea ardua e imposible de automatizar.

- Estaremos interesados en investigar métodos que permitan inferir la corrección de un argumento basándonos en la forma de los enunciados que la componen.

- Intimamente conectado con el concepto de argumento correcto está el de enunciado analítico:

  Un enunciado es analítico si y solamente si en cualquier circunstancia concebible es verdadero.

  - Enunciado analítico ("verdades de razón", "verdades necesarias", o "verdades lógicas"):

    Sócrates murió en el 399 a.C. o Sócrates no murió en el 399 a.C. ,

  - Enunciado sintético ("verdades de hecho" o "verdades contingentes")

    Sócrates murió en el 399 a.C. ,

- Puede considerarse que todo enunciado analítico lo es en virtud de su forma.

  - Sócrates murió en el 399 a.C. o Sócrates no murió en el 399 a.C. ,
  - Juan murió en el 399 a.C. o Juan no murió en el 399 a.C. ,
  - La nieve es blanca o La nieve no es blanca,

  Son todos analíticos, como también lo es cualquier enunciado de la forma "$\mathcal{A}$ o no $\mathcal{A}$"

- conexión entre analiticidad y corrección:

  Dado un argumento con una serie finita de premisas
  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \triangle \mathcal{C}$
  es correcto si y solamente si el enunciado
  Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ y $\ldots$ y $\mathcal{A}_n$ entonces $\mathcal{C}$
  es analítico.

Observación 1.1.1
La introducción que acabamos de realizar sobre que es la lógica ha seguido una orientación principalmente semántica, es decir, centrada en el valor de verdad de los enunciados cuando se relacionan con uno de los mundos posibles.

1.2. Introducción histórica.

La lógica matemática surge como el resultado de la convergencia de cuatro líneas de pensamiento:

1. La lógica antigua (Aristóteles, megárico-estoica).

2. La idea de un lenguaje completo y automático para el razonamiento.

3. Los nuevos progresos en álgebra y geometría acaecidos después de 1825.

4. La idea de que hay partes de la matemática que son sistemas deductivos, esto es, cadenas de razonamientos que se conforman a las reglas de la lógica.

1.3. Forma de presentación de los sistemas lógicos.

Los diferentes sistemas lógicos elementales tienen en común, en su presentación, una etapa previa de simbolización que suele hacerse a dos niveles:

- *Lógica proposicional*: Frases declarativas simples, enunciados y proposiciones.

- *Lógica de predicados*: Se toma como base los componentes de una proposición, términos, cuantificadores ...

Dentro de cada uno de estos niveles de representación del lenguaje, se pueden considerar dos formas de presentar las estructuras deductivas correctas:

- *Sintáctica*: Definición axiomática de una serie de estructuras deductivas correctas y de reglas para obtener nuevas estructuras deductivas correctas a partir de aquellas: Teoría de la demostración y Deducción natural.

- *Semántica*: Definición de significados (Verdadero, falso ...), definición de las estructuras deductivas correctas a partir de la relación de significados de los elementos de la deducción: Teoría de modelos.

1.4. Lenguaje formal de la lógica de enunciados.

- Siempre se ha dado por descontado que algún grado de formalización, en el estudio de lógica, es inevitable.

Ejemplo 2

$$\begin{array}{ll} & \textit{Si Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal;} \\ & \textit{Sócrates es un hombre;} \\ \hline \triangle & \textit{Sócrates es mortal.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \textit{Sócrates es un hombre;} \\ \hline \triangle & \textit{Sócrates es mortal.} \end{array}$$

La introducción de letras mayúsculas, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ para representar enunciados facilita el análisis de la corrección de los argumentos:

$$\begin{array}{ll} & \textit{Si } \mathcal{A} \textit{ entonces } \mathcal{B}; \\ & \mathcal{A}; \\ \hline \triangle & \mathcal{B}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A}; \\ \hline \triangle & \mathcal{B} \end{array}$$

- Cuando simbolizamos un enunciado compuesto, de la manera que lo hemos hecho en el ejemplo 2, lo que queda es un armazón lógico o matriz que denominamos "*forma enunciativa*". Estudiaremos formas enunciativas más bien que enunciados particulares.

- *variables de enunciado* (letras enunciativas, o también letras proposicionales):

  $$p, q, r, \dots$$

  que designan enunciados simples arbitrarios no especificados.

- *Conectivas*: Para simbolizar enunciados compuestos introducimos símbolos para las conectivas.

  1. Negación ($\neg$). La forma enunciativa $\neg p$ permite simbolizar un enunciado del tipo:

     no p;
     no es cierto que p;
     es falso que p.

  2. Conjunción ($\wedge$). La forma enunciativa $p \wedge q$, simboliza enunciados de la forma:

     p *y* q;
     p *pero* q;
     p *no obstante* q;
     p *sin embargo* q.

  3. Disyunción ($\vee$). La forma enunciativa $p \vee q$ simboliza enunciados de la forma:

     p *o* q;
     al menos p *o* q.

1. Condicional ($\rightarrow$). La forma enunciativa $p \rightarrow q$ simboliza enunciados de la forma:

    si p entonces q;
    si p, q;
    p implica q;
    p sólo si q;
    p suficiente para q;
    q si p;
    q necesario para p;
    q cuandoquiera que p;
    q siempre que p;
    no p a menos que q.

2. Bicondicional($\leftrightarrow$). $p \leftrightarrow q$ denota enunciados de la forma:

    p si y sólo si q;
    p necesario y suficiente para q

Definición 1.4.1 (formas enunciativas) *Una forma enunciativa es una expresión, en la que intervienen variables de enunciado y conectivas, que pude formarse utilizando las siguientes reglas:*

1. *Toda letra enunciativa $p, q, r, \ldots$ es una forma enunciativa correcta.*
2. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas enunciativas correctas, también son formas enunciativas correctas: $(\neg\mathcal{A}), (\neg\mathcal{B}), (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$.*
3. *Sólo son formas enunciativas correctas las que cumplen las reglas 1 y 2.*

Ejemplo 3 $((p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r)))$ *es una forma enunciativa, ya que cumple las reglas de construcción de la definición 1.4.1.*

- *Por (1),* p, q, r *son formas enunciativas.*
- *Por (2),* $((p \wedge q)$ *y* $(q \vee r)$ *son formas enunciativas.*
- *Por (2),* $(\neg(q \vee r))$ *es una forma enunciativa.*
- *Por (2),* $((p \wedge q) \rightarrow (\neg(q \vee r)))$ *es una forma enunciativa.*

Observaciones 1.4.2 *1. Normas para la escritura de formas enunciativas:*

a) *Una conectiva afecta a las letras proposicionales inmediatas o a los conjuntos inmediatos a ella que están entre paréntesis.*

b) *Reglas de precedencia:*

nivel 1:	$\neg$
nivel 2:	$\wedge, \vee$
nivel 3:	$\rightarrow, \leftrightarrow$

La jerarquía de la tabla indica que las conectivas de nivel i ligan más que las de nivel $i + 1$.

Por ejemplo, siguiendo estas normas,

- $(\neg p) \wedge (\neg q)$ *puede escribirse como* $\neg p \wedge \neg q$
- $[(p \wedge q) \vee s] \leftrightarrow [(\neg p) \vee q]$ *puede escribirse como* $(p \wedge q) \vee s \leftrightarrow \neg p \vee q$.

1. *Notad que las normas establecidas en la anterior observación (1) no forman parte de las reglas de construcción del lenguaje formal de la lógica de enunciados, que se definen en 1.4.1.*

2. *La definición 1.4.1 es un ejemplo de definición inductiva (o recursiva). Notad que:*

    a) *Las definiciones inductivas son una herramienta muy poderosa para precisas los conceptos con los se trabajan.*

    b) *Las definiciones inductivas permiten caracterizar conjuntos infinitos (numerables) como el que constituyen las formas enunciativas.*

    c) *La definición 1.4.1 establece un patrón que volverá a aparecer de nuevo cuando describamos en detalle los sistemas formales.*

Ejemplo 4 *Traducción a forma símbolica de algunos enunciados compuestos del lenguaje natural:*

- *"Si llueve se terminarán los problemas de sequía y no hará falta más dinero"*

llueve	p
se terminarán los problemas de sequía	q
hará falta más dinero	r

$$p \to q \wedge \neg r$$

- *"Sólo si distingues bien los diferentes acentos o te dice su lugar de procedencia sabrás si es gallego o portugués"*

distingues bien los diferentes acentos	p
te dice su lugar de procedencia	q
sabrás si es gallego o portugués	r

$$r \to p \vee q$$

- *"Un partido de fútbol no se gana a menos que se corra mucho y se tenga calidad"*

Un partido de fútbol se gana	p
se corra mucho	q
se tenga calidad	r

$$p \to q \wedge r$$

- *"Para que llueva o nieve es necesario que se den las condiciones climáticas adecuadas"*

llueve	p
nieva	q
darse las condiciones climáticas adecuadas	r

$$p \vee q \to r$$

1.5. Conectores, funciones de verdad y tablas de verdad.

- Uno de los objetivos de la lógica es determinar el valor de verdad de los enunciados (y a través de éstos de los argumentos).

- *Principio de bivalencia*: **todo enunciado o es verdadero o es falso, pero no ambas cosas a la vez**. Así una variable de enunciado podrá tomar uno de entre los dos *valores de verdad*: V (verdadero) o F (falso).

- Estamos interesados en el modo en el que la verdad o falsedad de un enunciado compuesto (o forma enunciativa compuesta) depende de los valores de verdad de los enunciados simples (o variables de enunciado) que lo constituyen y de las conectivas que los unen.

- Cada conectiva queda definida por *tabla de verdad* y le corresponde una función de verdad:
    - **Negación**

p	$\neg p$
V	F
F	V

La conectiva $\neg$ define una función de verdad
$f_\neg : \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$ tal que:

$$\begin{aligned} f_\neg(V) &= F \\ f_\neg(F) &= V \end{aligned}$$

- **Conjunción**

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La correspondiente función de verdad
$f_\wedge : (\{V, F\})^2 \longrightarrow \{V, F\}$ es:

$$\begin{array}{rcl} f_\wedge(V, V) & = & V \\ f_\wedge(V, F) & = & F \\ f_\wedge(F, V) & = & F \\ f_\wedge(F, F) & = & F \end{array}$$

ésta es una función de dos argumentos.

- **Disyunción**

  - Sentido *inclusivo*.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

y la correspondiente función de verdad
$f_\vee : (\{V, F\})^2 \longrightarrow \{V, F\}$ es:

$$\begin{array}{rcl} f_\wedge(V, V) & = & V \\ f_\wedge(V, F) & = & V \\ f_\wedge(F, V) & = & V \\ f_\wedge(F, F) & = & F \end{array}$$

- Sentido *exclusivo*.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

  Podemos expresar la disyunción exclusiva en términos de la negación, la conjunción y la disyunción de la forma siguiente:

  $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

  ("p o q, pero no ambos")

- **Condicional**

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - La definición que se acaba de dar del condicional choca con el uso ordinario de "si ... entonces ..." (relación causa-efecto entre el contenido del antecedente y el consecuente):

    Si llueve entonces cojo el paraguas

  - Por eso se nos antoja extravagante la combinación de enunciados que nada tienen que ver entre sí:

    Si los burros vuelan entonces $2 + 2 = 4$

    que es un enunciado verdadero.

- Criterio se le llama *extensional*: la lógica de conectivas se atiene estrictamente al valor de verdad de los enunciados y no tiene en cuenta el contenido de éstas ni las posibles relaciones de contenido entre ellas.
  (Condicional extensional, implicación material, implicación Filónica).

- La construcción "**if-then**", utilizada en muchos lenguajes de programación, también difiere del condicional empleado en lógica.

- Termiología:

  - El condicional $q \rightarrow p$ se denomina el *converso* de $p \rightarrow q$. - El condicional $\neg q \rightarrow \neg p$ se denomina la *contraposición* de $p \rightarrow q$.

- **Bicondicional**
  Aquí, la situación es clara: $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ es verdadero cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tengan el mismo valor de verdad (ambos verdaderos o ambos falsos).

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observaciones 1.5.1

1. *Existen otras conectivas binarias, a parte de las anteriores, aunque su significado intuitivo es menos claro. En total distinguimos 16 funciones veritativas, donde:*

f_1	*Es una Tautología (ver más adelante).*
f_2	*Es la disyunción de p y q* $(p \vee q)$.
f_3	*Implicación conversa de p y q* $(p \leftarrow q)$.
f_5	*Implicación material o condicional* $(p \rightarrow q)$.
f_7	*Coimplicación o equivalencia material* $(p \leftrightarrow q)$.
f_8	*Es la conjunción p y q* $(p \wedge q)$.
f_9	*Es la función de Sheffer o Barra de Sheffer* $(p\|q)$, *"p es incompatible con q". función Nand (No conjunción), equivale a* $(\neg(p \wedge q))$.
f_{10}	*Disyunción exclusiva (no equivalencia)* $(p \oplus q)$.
f_{12}	*Negación de la implicación de p y q* $(\neg(p \rightarrow q))$.
f_{14}	*Negación de la implicación conversa de p y q* $(\neg(p \leftarrow q))$.
f_{15}	*Es la función de Peirce o Barra de Peirce* $(p \downarrow q)$, *"ni p ni q". función Nor (No disyunción), equivale a* $(\neg(p \vee q))$.
f_{16}	*Es una contradicción (ver más adelante).*

el resto de las funciones no son fácilmente reconocibles.

2. *Las computadoras representan internamente la información mediante el uso de bits. Un bit tiene dos posibles valores, llamados "cero" y "uno", que pueden emplearse (entre otras cosas, como codificar números en base binaria) para representar los valores de verdad "F" y "V", respectivamente. Así, las operaciones lógicas pueden implementarse en un computador.*

   - *El álgebra de Boole estudia las operaciones que se pueden realizar con el conjunto* $\{0, 1\}$.
   - *Operaciones booleanas: complementación "$-$", suma "$+$", y producto "$\cdot$" (se corresponden, respectivamente, con las conectivas lógicas "$\neg$", "$\vee$", y "$\wedge$").*
   - *Se utilizan en el diseño de circuitos electrónicos y en la realización de operaciones con bits.*
   - *Las operaciones "$+$" y "$\cdot$" suelen denominarse, habitualmente, operaciones "OR" y "AND".*
   - *Las operaciones con bits pueden extenderse a cadenas de bits (operaciones bitwise).*
   - *Otras operaciones con bits muy empleadas son las denominadas "XOR", "NOR", y "NAND" (se corresponden, respectivamente, con las conectivas lógicas "$\oplus$", "$\downarrow$", y "$\uparrow$").*

- Lo que hemos estado haciendo ha sido una *valoración* de las variables enunciativas y las formas enunciativas binarias.

- Usando las tablas de verdad de las conectivas podemos construir la valoración de cualquier forma enunciativa, determinando el valor de verdad de la misma a partir del valor de verdad de sus componentes atómicos.

- Al conjunto de todas las valoraciones de una forma enunciativa le corresponde una función de verdad: las formas enunciativas son *funciones de verdad* o *funciones veritativas*.

- Una valoración queda fijada una vez establecida la corresponciente atribución veritativa de las variables enunciativas.

Definición 1.5.2 (Atribución veritativa) *Dada una forma enunciativa $\mathcal{A}$. Llamamos atribución veritativa a una asignación, α, de valores de verdad al conjunto, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de variables enunciativas de $\mathcal{A}$. Es decir, una atribución veritativa es una aplicación $\alpha : \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \longrightarrow \{V, F\}$.*

Ejemplo 5 *Sea la forma enunciativa* $\mathcal{A} \equiv p \vee q \rightarrow r$. *La asignación de valores de verdad*

p	q	r
V	F	V

sería una de las ocho posibles atribuciones veritativas de $\mathcal{A}$.

Definición 1.5.3 (Valoración) *Dada una atribución veritativa,* α, *una valoración es una función* ϑ *cuyo dominio es el conjunto de las formas enunciativas y cuyo rango es el conjunto* $\{V, F\}$, *tal que para cualesquiera formas enunciativas* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$.

1. $\vartheta(\mathcal{A}) = \alpha(\mathcal{A})$ *si* $\mathcal{A}$ *es una variable enunciativa;*
2. $\vartheta(\neg\mathcal{A}) = V$ *si* $\vartheta(\mathcal{A}) = F$;
3. $\vartheta(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = V$ *si* $\vartheta(\mathcal{A}) = V$ *y* $\vartheta(\mathcal{B}) = V$;
4. $\vartheta(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = V$ *si* $\vartheta(\mathcal{A}) = V$ *o* $\vartheta(\mathcal{B}) = V$;
5. $\vartheta(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = V$ *si no es el caso que* $\vartheta(\mathcal{A}) = V$ *y* $\vartheta(\mathcal{B}) = F$;
6. $\vartheta(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = V$ *si* $\vartheta(\mathcal{A}) = v(\mathcal{B})$;

Observación 1.5.4

La definición 1.5.3 es otro caso de definición inductiva. Más concretamente, se trata de una definición por inducción semiotica, basada en la estructura de las formas enunciativas.

- Para obtener sistemáticamente todas las valoraciones de una forma enunciativa, basta con construir su tabla de verdad. Proponemos dos métodos que facilitan la *construcción de tablas de verdad*.

Ejemplo 6 *Sea la forma enunciativa*
$\mathcal{A} \equiv (p \wedge q \to r) \to (p \to \neg q \vee r)$.

- *Con el primero de los métodos obtenemos la siguiente tabla de verdad:*

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \to r$	$\neg q \vee r$	$p \to \neg q \vee r$	$\mathcal{A}$
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V

- *y con el segundo de los métodos:*

$(p$	$\wedge$	q	$\to$	$r)$	$\to$	$(p$	$\to$	$\neg$	q	$\vee$	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	V	F

- A una forma enunciativa cualquiera, $\mathcal{A}$, le corresponde una función veritativa

  $$f_{\mathcal{A}} : (\{V, F\})^n \longrightarrow \{V, F\}$$

  definida por su tabla de verdad.

Definición 1.5.5 (Lógicamente equivalente) *Dadas dos formas enunciativas, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, con funciones veritativas $f_{\mathcal{A}}$ y $f_{\mathcal{B}}$ asociadas. Se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son lógicamente equivalentes, denotado $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, si $f_{\mathcal{A}}$ y $f_{\mathcal{B}}$ son la misma función de verdad.*

Ejemplo 7 *Algunas equivalencias notables:*

(1)	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	*Definición*
(2)	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	*Definición*
(3)	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	*Equivalencia*
(4)	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	*Leyes de DE MORGAN*
(5)	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	*Leyes de DE MORGAN*
(6)	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	*Conmutativa*
(7)	$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$	*Asociativa*
(8)	$(p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	*Distributiva*
(9)	$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$	*Absorción*
(10)	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	*Idempotencia*
(11)	$p \wedge F \Leftrightarrow F$	*Dominancia*
(12)	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	*Conmutativa*
(13)	$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$	*Asociativa*
(14)	$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	*Distributiva*
(15)	$(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$	*Absorción*
(16)	$p \vee p \Leftrightarrow p$	*Idempotencia*
(17)	$p \vee V \Leftrightarrow V$	*Dominancia*
(18)	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	*Doble negación*

Aquí V denota una tautología y F una contradicción.

Observación 1.5.6

Las equivalencias (4) a (18) se corresponden con las llamadas "Leyes de identidad del álgebra de Boole". Estas leyes son particularmente útiles en el diseño y simplificación de circuitos electrónicos.

Definición 1.5.7

1. *Una forma enunciativa es una tautología si toma el valor de verdad V bajo toda valoración.*
2. *Una forma enunciativa es una contradicción si toma el valor de verdad F bajo toda valoración.*
3. *Una forma enunciativa es una contingencia si toma el valor de verdad V para unas valoraciones y F para otras.*

- El concepto de tautología proporciona una noción de *verdad lógica*, identificando aquellas formas enunciativas que son verdaderas bajo cualquier circunstancia.

- Saber en que categoría, de estas tres, cae cada enunciado o forma enunciativa es decidible. Basta calcular la tabla de verdad del enunciado o forma enunciativa en cuestión.

Ejemplo 8

1. $p \vee \neg p$ *es una tautología.*
2. $p \wedge \neg p$ *es una contradicción.*
3. $p \vee q$ *es una contingencia.*

Proposición 1.5.8 *$\mathcal{A}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ es una tautología.*

- Debido al resultado de la proposición 1.5.8, en lugar de equivalencia lógica se habla en ocasiones de *equivalencia tautológica*.

Ejemplo 9 *De acuerdo con la proposición 1.5.8, las formas enunciativas resultantes de sustituir el operador de equivalencia semántica ($\Leftrightarrow$) por el bicondicional ($\leftrightarrow$), en el ejemplo 7, son tautologías.*

Proposición 1.5.9 *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ son tautologías, entonces $\mathcal{B}$ es una tautología.*

Observación 1.5.10
En la prueba de esta proposición se ha utilizado el conocido método de "demostración por contradicción" o "reducción al absurdo".

- La proposición 1.5.9 refleja que la llamada regla *modus ponens* transmite la tautologicidad, ya que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son tautologías, su consecuencia, $\mathcal{B}$, también lo será.

- Otras propiedades significativas son:
  1. Las tautologías constituyen un conjunto de enunciados que es decidible.
  2. Las tautologías tienen la propiedad de la *sustitutividad*.
  3. En las equivalencias tautológicas se cumple la ley de *intercambio*.

1.6. Conjuntos adecuados de conectivas: Interdefinibilidad de los conectores

Definición 1.6.1 *Un conjunto adecuado de conectivas es un conjunto tal que toda función enunciativa puede representarse por medio de una forma enunciativa en la que sólo intervienen conectivas de ese conjunto.*

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{|\}$ y $\{\downarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas.

- Así pues, tomando como base el negador y cualquiera de las otras tres conectivas, o la barra de Sheffer o la barra de Peirce, es posible definir las restantes conectivas:

  - Leyes de interdefinición tomando como base $\neg$ y $\wedge$:

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$	Definición del disyuntor
$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$	Definición del implicador
$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \wedge \neg(\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{A})$	Definición del coimplicador

  - Leyes de interdefinición tomando como base $\neg$ y $\vee$:

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$	Definición del conjuntor
$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	Definición del implicador
$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg(\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{A}))$	Definición del coimplicador

  - Leyes de interdefinición tomando como base $\neg$ y $\rightarrow$:

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B})$	Definición del conjuntor
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	Definición del disyuntor
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$	Definición del disyuntor
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$	Definición del disyuntor
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$	Definición del disyuntor
$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$	Definición del coimplicador

- La barra de Sheffer: $\mathcal{A}|\mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$

$$\begin{array}{l}
\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}|\mathcal{A} \\
\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A}|\mathcal{B})|(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \\
\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A}|\neg\mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A}|\mathcal{A})|(\mathcal{B}|\mathcal{B}) \\
\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}|\neg\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}|(\mathcal{B}|\mathcal{B})
\end{array}$$

- La Barra de Peirce: $\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

$$\begin{array}{l}
\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \downarrow \mathcal{A} \\
\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \downarrow \neg\mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A}) \downarrow (\mathcal{B} \downarrow \mathcal{B}) \\
\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B}) \downarrow (\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B}) \\
\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \downarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow [(\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A}) \downarrow \mathcal{B}] \downarrow [(\mathcal{A} \downarrow \mathcal{A}) \downarrow \mathcal{B}]
\end{array}$$

Observación 1.6.2
Las últimas equivalencias muestran el precio que hay que pagar, en términos de longitud y complicación de las formas enunciativas, si se simplifica en exceso el conjunto de conectivas empleadas para representar las funciones veritativas.

1.7. Argumentación y validez

- Volvemos a tratar el tema de la corrección o validez de un argumento desde una perspectiva rigurosa.

Definición 1.7.1 (Forma argumentativa) *Una forma argumentativa es una sucesión finita de formas enunciativas, de las cuales la última se considera la conclusión y el resto las premisas.*

Definición 1.7.2 (Forma argumentativa válida) *La forma argumentativa*

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \triangle \mathcal{A}$$

es inválida si existe una atribución veritativa tal que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ *toman el valor* V *y* A *toma el valor* F. *En otro caso la forma argumentativa es válida.*

- La siguiente proposición pone de manifiesto la relación existente entre argumentación correcta y el condicional, ya mencionada al principio de este capítulo.

Proposición 1.7.3 *La forma argumentativa*

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \triangle \mathcal{A}$$

es válida si y sólo si la forma enunciativa

$$(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{A}$$

es una tautología.

Capítulo 2

CALCULO PROPOSICIONAL: T. DE LA DEMOSTRACION.

- **Confirmar la corrección de un argumento mediante el método de las tablas de verdad plantea dificultades.**

- **Por esta razón estamos interesados en la formalización de la lógica:**

  1. **Definición precisa de un lenguaje formal.**

  2. **Reglas de deducción que permita la manipulación de símbolos.**

- **La idea es encontar un procedimiento que nos permita construir una argumentación paso a paso, sabiendo que cada paso es válido.**

- **La palabra “formal” se usa para referirnos a esa situación en la que se emplean símbolos cuyo comportamiento y propiedades están completamente determinados por un conjunto dado de reglas.**

- **En un** *sistema formal* **los símbolos carecen de significado, y al manejarlos hemos de tener cuidado de no presuponer nada sobre sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema.**

Definición 2.0.4 (Sistema formal, S)

- ***Un vocabulario: Un conjunto (infinito numerable) de símbolos a utilizar en S.***
- ***Reglas que establezcan qué cadenas de signos son fórmulas bien formados en S.***
- ***Un conjunto de las definiciones utilizadas.***
- ***Un conjunto de fórmulas bien formados de S que van a utilizarse como axiomas.***
- ***Un conjunto finito de reglas de inferencia y de reglas de construcción de una deducción en S.***
- ***Las condiciones necesarias y suficientes que debe reunir una deducción para dar como resultado un teorema de S.***
- ***Axiomas adicionales de S.***

Observaciones 2.0.5

1. *Alfabeto*, *cadena de signos* , *fórmulas bien formadas*.

2. *Formalismo*: ***conjunto de signos y cadenas de signos que son parte de un sistema formal.***

3. ***La*** *teoría de la demostración* ***estudia los formalismos con independencia de toda interpretación.***

4. ***La expresión "fórmula bien formada" la abreviaremos mediante la notación "fbf". Las fbf's las definiremos inductivamente.***

5. ***En un sistema formal los axiomas pueden estar ausentes. Un sistema formal es un concepto más general que el concepto de sistema axiomático.***

6. ***Cuando se empleen axiomas adicionales hablaremos de*** *extensión* ***del sistema formal.***

7. ***A un sistema formal, también suele denominarsele*** *cálculo*.

2.1. El sistema formal L.

Church en 1956 (axiomas inspirados en Lukasiewicz).

Definición 2.1.1 ***El*** *sistema formal* L *del cálculo de enunciados* ***está caracterizado por:***

1. Vocabulario***: el conjunto de símbolos infinito (numerable)***

$$\{\neg, \rightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

2. Conjunto de fbf's***:***

a***)*** $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ***son fbf's.***

b***) Si*** $\mathcal{A}$ ***y*** $\mathcal{B}$ ***son fbf's, entonces*** $(\neg\mathcal{A})$ ***y*** $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ***son fbf's.***

c***) El conjunto de todas las fbf's es el generado por las reglas a y b.***

3. Definiciones***:***

$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ ***es abreviatura de:*** $(\neg(\mathcal{A} \rightarrow (\neg\mathcal{B})))$
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ ***es abreviatura de:*** $((\neg\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})$
$(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ ***es abreviatura de:*** $(\neg((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))))$

4. Axiomas***: Cualesquiera que sean las fbf's*** $\mathcal{A}$***,*** $\mathcal{B}$ ***y*** $\mathcal{C}$***, las siguientes fbf's son axiomas de*** L

(L1) $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$
(L2) $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$
(L3) $(((\neg\mathcal{A}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$

5. Reglas de inferencia***:***

Regla *modus ponens* ***(MP): de*** $\mathcal{A}$ ***y*** $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ***se puede inferir como consecuencia inmediata*** $\mathcal{B}$***.***

- **Notad que el vocabulario y el conjunto de fbf's se han elegido para que sean una representación de las formas enunciativas.**

- **El alumno debe ser consciente de que las nociones de "forma enunciativa" y "equivalencia lógica" son propias del contexto semántico del capítulo 1 y no tienen lugar en el contexto púramente sintáctico del sistema formal L.**

- **Se ha limitado el número de conectivas con el fin de mantener simple el sistema formal L.**

- **La única regla de inferencia de L, la regla** *modus ponens*, **también es denominada** *regla de separación*, **ya era conocida por los filósofos estoico y se corresponde con una forma de proceder habitual en los razonamientos realizados con el lenguaje ordinario.**

- **Los axiomas son la parte más oscura del sistema (Comprobar que tomados como formas enunciativas son tautologías).**

Observaciones 2.1.2

1. ***Los puntos (1) y (2) caracterizan nuestro lenguaje. Los símbolos $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$ no son parte de L.***

2. *Lenguaje objeto* ***(el lenguaje L) y*** *metalenguaje* ***(la combinación del lenguaje castellano con ciertos símbolos especiales).***

3. *Metateoremas*: ***resultados que establezcamos sobre L, utilizando el metalenguaje.***

4. ***Hay infinitos axiomas de L, por lo que hemos tenido que especificarlos mediante esquemas de axiomas.***

5. ***Es habitual visualizar las reglas de inferencia de forma similar a como haciamos con las argumentaciones:***

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \to \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \\ \hline \mathcal{B} \end{array}$$

2.2. El concepto de deducción formal

Definición 2.2.1 (deducción) ***Sea*** Γ ***un conjunto de fbf's de*** L***. Una sucesión finita*** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ***de fbf's de*** L***, es una*** *dedución a partir de* Γ ***si para todo*** $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ***se cumple alguna de las siguientes condiciones:***

1. $\mathcal{A}_i$ ***es un axioma de*** L***,***

2. $\mathcal{A}_i \in \Gamma$

3. $\mathcal{A}_i$ ***se infiere inmediatamente de dos miembros anteriores de la sucesión, digamos*** $\mathcal{A}_j$ ***y*** $\mathcal{A}_k$ ***(con*** $j < i$ ***y*** $k < i$***), mediante la aplicación de la regla MP.***

NOTACION: $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}_n$.

Observaciones 2.2.2

1. ***Dada una deducción*** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ***se dice que es de*** *longitud* n***, donde*** n ***es el número de fórmulas en la sucesión.***

2. ***En la definición anterior, las fórmulas*** $\mathcal{A}_j$ ***y*** $\mathcal{A}_k$ ***deben ser necesariamente de la forma*** $\mathcal{B}$ ***y*** $\mathcal{B} \to \mathcal{A}_i$ ***(o viceversa).***

3. ***Si*** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ ***es una deducción en*** L***, también lo es*** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_k$***, con*** $k < n$***.***

4. ***Los axiomas y las premisas pueden emplearse en cualquier punto de una deducción.***

5. ***El símbolo*** $\vdash_{\mathsf{L}}$ ***es un metasímbolo y*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}_n$ ***lejos de ser parte de*** L ***es un enunciado acerca de*** L***: el enunciado que afirma que la fbf*** $\mathcal{A}_n$ ***es deriveble a partir de*** Γ***.***

Definición 2.2.3 ***Una*** *demostración* ***en*** L ***es una deducción en*** L ***sin premisas. Si la fbf*** $\mathcal{A}$ ***es el último miembro de una demostración, decimos que*** $\mathcal{A}$ ***es un*** *teorema* ***de*** L ***y escribimos*** $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$***.***

Observaciones 2.2.4

1. ***"*** $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$***" es una abreviatura de "*** $\emptyset \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$***".***
2. ***Los axiomas de*** L ***son teoremas de*** L***.***

- **Recomendaciones para la realización de una deducción:**

  1. **Si la fórmula a demostrar, $\mathcal{B}$, guarda identidad formal, es decir, es un caso particular de uno de los esquemas de axiomas, la prueba está hecha.**
  2. **Cuando no se cumpla el primer criterio, se hará coincidir la fómula a demostrar, $\mathcal{B}$, (mediante las oportunas sustituciones) con el consecuente de un implicador, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, de cualquiera de las fórmulas o esquemas de formulas ya probadas.**
  3. **Finalmente, se intentará liberar ese consecuente, $\mathcal{B}$, del antecedente, $\mathcal{A}$, que lo condiciona mediante la aplicación de la regla MP. Previamente, habrá sido necesario obtener el antecedente, $\mathcal{A}$, del implicador haciendo uso, nuevamente, de las manipulaciones (1) a (3).**

Ejemplo 10 $\vdash_{\mathsf{L}} (p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$***:***

(1)	$(p_1 \to (p_2 \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	***L2***
(2)	$(p_1 \to (p_2 \to p_1))$	***L1***
(3)	$((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	***MP,(1)(2)***

Ejemplo 11 ***Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ fbf's cualesquiera de L.***

1. $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))\} \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$

(1)	$\mathcal{A}$	***P***
(2)	$(\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$	***P***
(3)	$((\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})) \to$	
	$((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})))$	***L2***
(4)	$((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$	***MP,(2)(3)***
(5)	$(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$	***L1***
(6)	$(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$	***MP,(1)(5)***
(7)	$(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$	***MP,(4)(6)***

2. $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ ***(****Teorema de la identidad****)***

(1)	$((\mathcal{A} \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A})) \to$	
	$((\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})))$	***L2***
(2)	$(\mathcal{A} \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}))$	***L1***
(3)	$((\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A}))$	***MP,(1)(2)***
(4)	$(\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A}))$	***L1***
(5)	$(\mathcal{A} \to \mathcal{A})$	***MP,(3)(4)***

3. $\vdash_{\mathsf{L}} (\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (\neg\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})) & \textbf{\textit{L1}} \\
(2) & (((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})) & \textbf{\textit{L3}} \\
(3) & ((((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})) \to & \\
 & (\neg\mathcal{B} \to (((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})))) & \textbf{\textit{L1}} \\
(4) & (\neg\mathcal{B} \to (((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))) & \textbf{\textit{MP,(2)(3)}} \\
(5) & (\neg\mathcal{B} \to ((\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))) \to & \\
 & ((\neg\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})) \to (\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))) & \textbf{\textit{L2}} \\
(6) & ((\neg\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})) \to (\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))) & \textbf{\textit{MP,(4)(5)}} \\
(7) & (\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))) & \textbf{\textit{MP,(1)(6)}}
\end{array}
$$

- **Estos ejemplos muestran que las deducciones se presentan más que como una sucesión de fórmulas, como una sucesión de líneas.**
- **Lo segundo que reflejan estos ejemplos es que, al igual que $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$ no es parte de L, son** *metateoremas*.
- **Los resultados generales obtenidos sobre L en el ejemplo anterior son:**

  Para fbf's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ cualesquiera de L:
  1. $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))\} \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$
  2. $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$ **(***Teorema de la identidad***)**
  3. $\vdash_{\mathsf{L}} (\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$

  Sólo cuando instanciemos las variables metalingüisticas por fbf's obtendremos deducciones y teoremas de L.
- **Como se ha podido apreciar, deducir en un sistema axiomático puede ser complejo y poco intuitivo.**
- **Una manera de hacer menos ardua la tarea de la deducción, o de la demostración de teoremas, es permitir que todo teorema de L pueda ser usado como premisa en una deducción e insertado en cualquier punto de una demostración.**
- **Otro modo de facilitar la tarea de la demostración consiste en usar ciertos metateoremas, que tienen el efecto de reglas de inferencia adicionales.**

2.3. Teorema de la deducción.

Proposición 2.3.1 ***Sean*** $\mathcal{A}$ ***y*** $\mathcal{B}$ ***fbf's de*** L ***y*** Γ ***un conjunto de fbf's de*** L ***(que puede ser vacio). Si*** $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{B}$ ***entonces*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$***.***

Proposición 2.3.2 ***Sean*** $\mathcal{A}$ ***y*** $\mathcal{B}$ ***fbf's de*** L ***y*** Γ ***un conjunto de fbf's de*** L ***(que puede ser vacio). Si*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ***entonces*** $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{B}$***.***

Corolario 2.3.3 (regla del silogismo hipotético (SH)) ***Sean*** $\mathcal{A}$***,*** $\mathcal{B}$ ***y*** $\mathcal{C}$ ***fbf's de*** L***.***

$$\{(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})\} \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}).$$

Observaciones 2.3.4

1. ***El resultado anterior puede entenderse como una regla de inferencia que dice: si se ha deducido*** $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ ***y*** $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ ***como linea inmediatamente siguiente, en una deducción, se puede inferir*** $(\mathcal{A} \to \mathcal{C})$***.***

2. ***Hay varias maneras de aplicar el teorema de la deducción. Por ejemplo a partir de***

   $$\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C}), \mathcal{A}\} \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{C}$$

   pueden obtenerse cualquiera de los resultados siguientes:

   $$\{(\mathcal{B} \to \mathcal{C}), \mathcal{A}\} \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$$

   o bien

   $$\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), \mathcal{A}\} \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

3. ***Notad que si aplicamos reiteradamente el teorema de la deducción, al resultado del corolario obtenemos:***

   $$\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))$$

Proposición 2.3.5 ***Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ fbf's cualesquiera de L.***

1. $\vdash_{\mathsf{L}} (\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.

(1)	$\neg\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$	***L1***
(2)	$((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$	***L3***
(3)	$\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$	***SH, (1), (2)***

2. $\vdash_{\mathsf{L}} (\neg\neg\mathcal{A} \to \mathcal{A})$.

(1)	$\neg\neg\mathcal{A}$	***Hipótesis***
(2)	$\neg\neg\mathcal{A} \to (\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\neg\mathcal{A}))$	***Proposición 2.3.5(1)***
(3)	$(\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\neg\mathcal{A}))$	***MP, (1), (2)***
(4)	$(\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\neg\mathcal{A}) \to (\neg\neg\mathcal{A} \to \mathcal{A})$	***L3***
(5)	$\neg\neg\mathcal{A} \to \mathcal{A}$	***MP, (3), (4)***
(6)	$\mathcal{A}$	***MP, (1), (5)***

Por lo tanto, $\neg\neg\mathcal{A} \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$ ***y haciendo uso del teorema de la deducción*** $\vdash_{\mathsf{L}} (\neg\neg\mathcal{A} \to \mathcal{A})$.

3. $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A}$.

(1)	$\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{A}$	***Proposición 2.3.5(2)***
(2)	$(\neg\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A})$	***L3***
(3)	$\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{A}$	***MP, (1), (2)***

2.4. Propiedades formales de la lógica de enunciados: metalógica.

Una de las principales tareas de la metateoría consiste en considerar el sistema desde un punto de vista global y someterlo a las siguientes preguntas:

1. **¿ El sistema L es *correcto* ?. Esto es, ¿ el concepto de tautología del capítulo 1, que expresa nuestra noción de verdad lógica, se corresponde con los teoremas de L ?.**

   $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$ **es una tautología.**

2. **¿ Hay seguridad de que un sistema está exento de contradicción?. Si la respuesta es afirmativa diremos que el sistema es *consistente* o *no contradictorio*.**

3. **¿ El sistema L es *completo* ?. Esto es, ¿ Hay seguridad de que el sistema L tiene la potencia o capacidad necesaria para suministrar todas aquellas conclusiones tautológicas que, en principio, desearíamos obtener de él ?.**

   $\mathcal{A}$ **es una tautología** $\Rightarrow \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$

4. **¿ Existe un procedimiento que permita decidir de un modo mecánico si una fórmula es o no deducible en un sistema ?. Si la respuesta es afirmativa diremos que el sistema es *decidible*.**

2.4.1. Corrección y consistencia

A) CORRECCION

- **Hemos definido las fbf de L de manera que pudiesemos interpretarlas como formas enunciativas, estando representada cada función de verdad por alguna fbf.**

- **El proceso de interpretación se realizará mediante una valoración.**

- **También llamaremos** *tautología* **a aquellas fbf's que son verdaderas para toda valoración.**

Teorema 2.4.1 (Teorema de la corrección) ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf de L. Si $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$ entonces $\mathcal{A}$ es una tautología.***

B) CONSISTENCIA

- **Estudiamos el problema de la consistencia desde el punto de vista de la teoría de la deducción.**

- **Este problema está relacionado con el de la corrección.**

- **La consistencia es una propiedad de los conjuntos de fórmulas. Si un conjunto de fbf's, Γ, es inconsistente cualquier fbf podrá ser deducida a partir de Γ en L.**

  Tal conjunto Γ, deberá ser rechazado por carecer de valor probatorio.

Definición 2.4.2 ***Sea*** Γ ***un conjunto de fbf's.***

1. Γ ***es*** *inconsistente* ***si y sólo si cualquier fbf de*** L ***es deducible a patir de*** Γ***.***
2. Γ ***es*** *consistente* ***si y sólo si no es inconsistente. Esto es, existe alguna fbf de*** L ***que no puede deducirse a partir de*** Γ***.***

Proposición 2.4.3 ***Sean*** Γ ***y*** Δ ***conjuntos de fbf's.***

1. ***Si*** Γ ***es consistente y*** $\Delta \subset \Gamma$ ***entonces*** Δ ***es consistente.***
2. ***Si*** Γ ***es inconsistente y*** $\Gamma \subset \Delta$ ***entonces*** Δ ***es inconsistente.***

Proposición 2.4.4 (Caracterización de la consistencia) ***Sea*** Γ ***un conjunto de fbf's.*** Γ ***es*** *consistente* ***si y sólo si no existe una fbf*** $\mathcal{A}$ ***de*** L ***tal que*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$ ***y*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} \neg\mathcal{A}$***.***

Proposición 2.4.5 (Caracterización de la inconsistencia) ***Sea*** Γ ***un conjunto de fbf's.***

1. Γ ***es*** *inconsistente* ***si y sólo si existe una fbf*** $\mathcal{A}$ ***de*** L ***tal que*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$ ***y*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} \neg\mathcal{A}$***.***
2. Γ ***es*** *inconsistente* ***si y sólo si existe una fbf*** $\mathcal{A}$ ***de*** L ***tal que*** $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})$***.***

Observación 2.4.6

Notad que la forma enunciativa $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})$ ***es una contradicción, de ahí que suela decirse: Un conjunto de fbf's es inconsistente si y sólo si de él se desprende una contradicción.***

Proposición 2.4.7 ***El sistema*** L ***es consistente.***

- **En la prueba de este resultado juega un papel determinante el teorema de la corrección.**

2.4.2. Completitud

Teorema 2.4.8 (Teorema de la completitud) ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf de L. Si $\mathcal{A}$ es una tautología entonces $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{A}$.***

- **El concepto de deducibilidad es un concepto sintáctico, mientras que el de tautalogicidad es semántico. Ambos conceptos son distintos y en principio no tienen por qué coincidir.**

- **El sistema L se definió para que ambos conceptos fueran equivalentes.**

- **Los teoremas 2.4.1 y 2.4.8 confirman su equivalencia.**

2.4.3. Decidibilidad

Definición 2.4.9 ***Conjunto de instrucciones explícito que permite realizar una tarea de cómputo (no necesariamente numérico), que puede usarse para encontrar la respuesta de cualquier pregunta de entre las de una clase.***

Definición 2.4.10 (indecidibilidad) ***Un sistema formal S es (recursivamente)*** *indecidible* ***si y sólo si, no existe ningún algoritmo que pueda responder a preguntas de la clase:***

> ***¿ Es $\mathcal{A}$ un teorema de S?, donde $\mathcal{A}$ es una fbf de S.***

En caso contrario diremos que el sistema es *decidible*.

Proposición 2.4.11 ***El sistema*** L ***es decidible***

Observación 2.4.12
Los sistemas formales de la lógica de predicados, en general, son indecidibles.

- **La decidibilidad de** L **hace innecesaria la construcción de demostraciones, basta considerar una fbf como forma enunciativa y construir su tabla de verdad para saber si la fbf era o no teorema.**

- **Sin embargo, en la práctica, el método semántico de las tablas de verdad es ineficiente.**

2.5. Regla de intercambio.

- **En el sistema L, el correlato del concepto semántico de equivalenca lógica es el concepto de** *demostrablemente equivalente***.**

Definición 2.5.1 ***Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbf de L. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son*** *demostrablemente equivalentes* ***si y sólo si $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$.***

Observación 2.5.2
Recordemos que la conectiva $\leftrightarrow$ es un símbolo definido de nuestro lenguaje. La fbf $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una abreviatura de $\neg((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$.

- **Dos resultados interesantes.**

Proposición 2.5.3 (caracterización de demostrablemente equivalente)
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbf de L cualesquiera. $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ si y sólo si $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ y $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$.

Corolario 2.5.4 ***Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbf de L cualesquiera. Si $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ y $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$ entonces $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{C})$.***

- **La siguiente proposición muestra la identidad entre los conceptos de demostrablemente equivalente y lógicamente equivalente (tautológicamente equivalente).**

Proposición 2.5.5 ***$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son demostrablemente equivalentes si y sólo si son lógicamente equivalentes.***

Ejemplo 12 ***Segun la proposición 2.5.5, las equivalencias del ejemplo 7 son demostrables.***

- **El resultado principal de este apartado: el teorema de intercambio.**

Proposición 2.5.6 ***(Teorema de intercambio) Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}[\mathcal{A}]$ fbf's cualesquiera Si $\vdash_{\mathsf{L}} (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ entonces $\vdash_{\mathsf{L}} \mathcal{C}[\mathcal{A}] \leftrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{B}]$.***

Observación 2.5.7
La proposición anterior, en palabras, indica que Si $\mathcal{A}$ es demostrablemente equivalente a $\mathcal{B}$ entonces $\mathcal{C}[\mathcal{B}]$, resultado de sustituir las ocurrencias de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$, es demostrablemente equivalente a $\mathcal{C}[\mathcal{A}]$.

- **La utilidad del teorema 2.5.6 es la de plantear la deducción basándola en intercambios de partes de las fórmulas que se reescriben con otras equivalentes.**

- **El teorema de intercambio puede entenderse como una regla de inferencia:**

$$\frac{\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B},\ \mathcal{C}[\mathcal{A}]}{\mathcal{C}[\mathcal{B}]}$$

Ejemplo 13 ***Este ejemplo ilustra el uso del teorema de intercambio. Se hace uso de la equivalencia existente entre las fbf's*** $\neg\neg\mathcal{A}$ ***y*** $\mathcal{A}$***.***

(1)	$\neg\neg\mathcal{A} \to (\neg(\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}))$	
(2)	$\mathcal{A} \to (\neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}))$	$\boldsymbol{I}^2, (\neg\neg\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}), (1)$

2.6. Otros sistemas formales.

- *Sistema de Kleene* **(1953).**

  1. Vocabulario**: el conjunto de símbolos infinito (numerable)**

  $$\{\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \rightarrow, (,), p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

  2. Definiciones**:**

  $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ **es abreviatura de:** $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$

  3. Axiomas:

(1)	$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$
(2)	$(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$
(3)	$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$
(4a)	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$
(4b)	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$
(5a)	$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
(5b)	$\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
(6)	$(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$
(7)	$(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B}) \rightarrow \neg\mathcal{A})$
(8)	$\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

- **Los axiomas como estructuras deductivas correctas:**

(1)	$\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$	
(2)	$(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})), \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}$	
(3)	$\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	**(R. Producto)**
(4a)	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vdash \mathcal{A}$	**(R. simplificación)**
(4b)	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vdash \mathcal{B}$	**(R. simplificación)**
(5a)	$\mathcal{A} \vdash (\mathcal{A}) \vee \mathcal{B})$	**(R. adición)**
(5b)	$\mathcal{B} \vdash (\mathcal{A}) \vee \mathcal{B})$	**(R. adición)**
(6)	$(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}), (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vdash \mathcal{C}$	**(R. pru. por casos)**
(7)	$(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), (\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B}) \vdash \neg\mathcal{A}$	**(R. reduc. al abs.)**
(8)	$\neg\neg\mathcal{A}) \vdash \mathcal{A}$	**(R. doble neg.)**

- **Esta visión arrojan luz sobre el significado intuitivo de estos axiomas.**

- **Puede apreciarse que estos axiomas son una parte de las reglas de deducción natural de Gentzen.**

Capítulo 3

CALCULO PROPOSICIONAL Y DEDUCCION NATURAL.

- **Los sistemas axiomaticos son dificiles de aplicar y se parecen poco al proceso de razonamiento no formalizado que se emplea en otras disciplinas como las matemáticas.**

- **En 1934, Gentzen presento un sistema sin axiomas y con sólo reglas de inferencia, cuya aplicación resultaba más familiar y sencilla que la de los viejos sistemas deductivos, por lo que lo llamó sistema de "*deducción natural*".**

- **Lo distintivo de un sistema de deducción natural es que:**

- **Desaparecen los axiomas.**

- **Aumentan las reglas de inferencia**

- **Se flexibiliza el concepto de deducción, haciendolo más rico. Al probar un teorema podremos utilizar diferentes estrategias:**
  1. **Deducción directa.**
  2. **Deducción indirecta (Reducción al absurdo).**
     - ***a*) Se supone la falsedad de la conclusión (negamos lo que queremos probar).**
     - ***b*) A partir de esta suposición obtener una contradicción.**
     - ***c*) Rechazar este supuesto en vista del resultado.**
     - ***d*) Como consecuencia, afirmar la conclusión deseada.**
  3. **Supuestos provisionales.**
     - ***a*) Sirven de apoyo momentáneo en el curso de la deducción.**
     - ***b*) *Descarga* o *Cancelación*.**

- **En un sistema de deducción natural se distinguen dos clases de reglas:**
  1. **Las *reglas de inferencia*.**
  2. **Reglas de construcción de una deducción.**

3.1. Reglas básicas de inferencia

- **Las reglas que gobiernan las operaciones deductivas por las que de una o dos fórmulas ya probadas se pasa a una tercera, se denominan** *reglas básicas de inferencia*

- **En una regla de inferencia el orden de las premisas es indiferente.**

- **El paso de las premisas a la conclusión en una regla recibe el nombre de** *inferencia inmediata***.**

- **Reglas básicas del cálculo de Gentzen:**

1. **Reglas básicas de la implicación.**

Eliminación del Implicador (EI, MP).
$$\frac{\begin{array}{l}\mathcal{A} \to \mathcal{B} \\ \mathcal{A}\end{array}}{\mathcal{B}}$$

Introducción del Implicador (II, TD).
$$\frac{\left\lceil \begin{array}{l}\mathcal{A} \\ \Downarrow \ldots \\ \mathcal{B}\end{array}\right\rfloor}{\mathcal{A} \to \mathcal{B}}$$

2. **Reglas básicas de la conjunción**

Eliminación del Conjuntor (EC, Simp).	
(EC1 ó Simp1) $$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{A}}$$	**(EC2 ó Simp2)** $$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

Introducción del Conjuntor (IC, Prod).
$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{A} \\ \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$$

3. **Reglas básicas de la disyunción.**

Eliminación del Disyuntor (ED, Cas).
$$\begin{array}{l} \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \\ \lceil \ \mathcal{A} \\ \quad \Downarrow \ldots \\ \lfloor \ \mathcal{C} \\ \lceil \ \mathcal{B} \\ \quad \Downarrow \ldots \\ \lfloor \ \mathcal{C} \\ \hline \quad \mathcal{C} \end{array}$$

Introducción del Disyuntor (ID, Ad).	
(ID1 ó Ad1)	**(ID2 ó Ad2)**
$\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$	$\dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$

4. **Reglas básicas de la negación.**

Eliminación del Negador (EN, DN).
$\dfrac{\neg\neg\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$

Introducción del Negador (IN, Abs).
$$\begin{array}{l} \lceil \ \mathcal{A} \\ \quad \Downarrow \ldots \\ \lfloor \ \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B} \\ \hline \quad \neg\mathcal{A} \end{array}$$

Observación 3.1.1 ***Las reglas de inferencia se corresponden con enunciados tautológicos.*** MP **:**

$$(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to \mathcal{B}$$

es una tautología.

3.2. Reglas de construcción de una deducción

Definición 3.2.1 (Deducción) ***Una*** *deducción* ***(o*** *derivación****) es una secuencia finita de fórmulas tales que cada una de ellas es:***

1. ***un supuesto inicial o premisa inicial, fórmulas hipotéticamente dadas desde el principio de la derivación, o***
2. ***un supuesto provisional o subsidiario, que debe estar cancelado antes de la conclusión, o***
3. ***una fórmula derivada lógicamente de las anteriores por inferencia inmediata, que denominaremos consecuencias lógicas inmediatas.***

La última línea de la derivación es la *conclusión*. ***Una*** *demostración* ***o*** *prueba* ***es una deducción sin supuestos iniciales.***

Normas de notación y procedimiento:

1. **Cada fórmula se dispondrá en una de las línea.**

2. **Cada una de las líneas irá numerada en orden correlativo.**

3. **Las premisas iniciales llevarán como marca una línea horizontal "-". Por ej.:**

   - $2\ p \to q.$

   Las premisas se disponen como una sucesión de líneas al principio de la deducción.

4. **A las líneas procedentes de las consecuencias inmediatas se les añadirá un comentario, diciendo la regla aplicada y los números de línea de las premisas utilizadas. Por ej.:**

   $23\ q \to r$ **(MP) 14, 18**.

5. **En cualquier momento de la deducción se puede introducir como línea un supuesto provisional. Los supuestos provisionales se señalizarán con una escuadra izquierda mirando hacia abajo, "$\lceil$". Por ej.:**

   $\lceil\ 18\ \mathcal{A}.$

6. **Los supuestos provisionales deben ser cancelados antes de alcanzar la conclusión. La descarga o cancelación se señalizará con una escuadra izquierda mirando hacia arriba, "$\lfloor$". Por ej.:**

   $\lfloor$ 23 $A \rightarrow B$.

   Una vez cancelado un supuesto provisional, las líneas de la deducción subsidiaria serán marcadas mediante el símbolo "$|$". Por ej.:

   $|$ 23 $q \rightarrow r$ **(MP) 14, 18**.

7. **El final de la deducción se alcanza cuando se obtiene la conclusión, como última línea.**

Ejemplo 14 $\{(p \wedge q \rightarrow r), (r \rightarrow s)\} \vdash (p \wedge q \rightarrow s)$

$-$	(1)	$p \wedge q \rightarrow r$	
$-$	(2)	$r \rightarrow s$	
$\lceil$	(3)	$p \wedge q$	
$\mid$	(4)	r	***MP 1,3***
$\lfloor$	(5)	s	***MP 2,4***
	(6)	$p \wedge q \rightarrow s$	***TD 3-5***

3.3. Reglas derivadas de inferencia.

- **Las reglas básicas son suficientes para resolver todos los problemas de deducción formal de la lógica de enunciados.**

- **Las reglas derivadas se introducen para poder simplificar secuencias de pasos.**

- **Una** *regla derivada* **es una derivación a la que, por su importancia, se le da el rango de regla de inferencia.**

- **Ver el libro de Garrido [3] o [2] para una lista completa.**

3.4. Consejos para la resolución de argumentos.

1. **Si la fórmula que queremos demostrar es una implicación, se puede introducir como suposición el antecedente, con lo que si somos capaces de demostrar el consecuente, podremos llegar al la conclusión mediante el Teorema de la deducción.**
2. **Si en las premisas iniciales hay una disyunción, se puede suponer cada uno de los extremos y llegar en cada caso a la conclusión, para poder utilizar la prueba por casos.**
3. **Si nos fallan otros intentos podemos acudir a la reducción al absurdo.**
4. **En general, debemos fijarnos en la estructura de la conclusión para aplicar las reglas de introducción o de definición.**

Capítulo 4

CALCULO DE PREDICADOS:TEORIA SEMANTICA

- **En el capítulo 1 hemos analizado proposiciones y argumentos, descomponiendolos en enunciados constituyentes simples unidos por conectivas.**

  OBJETIVO: Comprobar que lo que hace válida una argumentación es su forma.

- **Dificultades de la lógica proposicional:**

$$\begin{array}{rl} & \textbf{Todos los hombres son mortales;} \\ & \textbf{Todos los griegos son hombres;} \\ \hline \triangle & \textbf{Todos los griegos son mortales.} \end{array}$$

  Intuitivamente considerabamos éste como ejemplo de argumento correcto.

- **Pero, si lo simbolizamos en el contexto de la lógica de enunciados:**

  $p, q \triangle r$

  que no es un argumento correcto en virtud de su forma.

- **La validez en este caso no depende de las relaciones entre las premisas y la conclusión en tanto que enunciados simples, sino de relaciones entre** *partes* **de los enunciados:**

$$\begin{array}{rl} & \textbf{Todos los } A\text{'s son } B\text{'s;} \\ & \textbf{Todos los } C\text{'s son } A\text{'s;} \\ \hline \triangle & \textbf{Todos los } C\text{'s son } B\text{'s.} \end{array}$$

- **Debemos darnos cuenta de dos cosas:**

  1. **El uso de símbolos para representar partes de un enunciado simple.** *Longrightarrow* **Necesidad de un lenguaje formal más rico.**

  2. **La naturaleza general de los enunciados "Todos los** A**'s son** B**'s".** *Longrightarrow* **Son enunciados enunciados moleculares o compuestos. Necesidad de cuantificadores.**

- **De la formalización y el estudio de estructuras deductivas de este tipo se ocupa la lógica de predicados o de términos. También se denomina lógica cuantificacional**

4.1. Nombres, functores y relatores

- **Nombres y variables:**
  - *Designador*: **una o varias palabras que hacen referencia a objetos o individuos. Forman el sujeto de una oración.**
  - **Hay muchas clases de designadores, los más usuales son los** *nombres*.
  - *Constantes*: **en lugar de nombres del lenguaje ordinario emplearemos las primeras letras minúsculas del alfabeto:** a, b **y** c.
  - **También emplearemos variables cuando queramos decir algo general.**
  - **En el lenguaje ordinario, los pronombres juegan el papel de las variables en las fórmulas matemáticas.**

    "El ha sido el asesino" equivale a: "x ha sido el asesino";
    "Yo he ido al cine" equivale a: "x ha ido al cine".

    Las variables no designan a ningún objeto o individuo en particular.
  - **Como variables emplearemos las últimas letras minúsculas del alfabeto:** x, y **y** z.

- **Functores:**
  - **Los nombres son designadores simples, pero no todos los designadores son así. Por ejemplo:**

    "El rio que atraviesa la capital de Francia"
    "La capital de Francia"

    Son designadores compuestos.

- *Functores*: expresiones que seguidas de un número determinado de designadores, forman a su vez un designador.

- Un functor que requiere n designadores para formar un nuevo designador, se llama functor n-ádico o n-ario.

- Los functores se corresponden con funciones (no necesariamente númericas).

- En nuestra formalización usaremos, en vez de functores del lenguaje ordinario, los símbolos: $f, g, h, \ldots$.

- Cuando se crea oportuno se indicara el número de argumentos del funtor mediante un superíndice.

- Los functores podrán contener variables. Un functor que contiene variables no designa a ningún objeto o individuo, es decir, no es un designador: *término abierto*.

▪ Términos son tanto los designadores como los términos abiertos.

▪ Relatores:

- Unidos a un número determinado de designadores forman un enunciado. Serán los enunciados atómicos de nuestro formalismo.

- Los relatores van a designar relaciones.

- Hablaremos de relatores n-arioscuando se necesiten n designadores para formar un enunciado.

- Los relatores monarios o *predicados* pueden usarse para definir conjuntos (clases), cuando empleamos variables junto con dichos predicados.

- **Emplearemos letras mayúsculas del alfabeto, "P", "Q", "R" para representar los relatores del lenguaje ordinario.**

- **Cuando se crea oportuno se indicara el número de argumentos del relator mediante un superíndice.**

- **Si en un enunciado sustituimos un designador por una variable, el resultado es lo que llamaremos una** *fórmula abierta*.

- **Lo que caracteriza a los enunciados es que son verdaderos o falsos. Sin embargo una fórmula abierta no podemos decir si es verdadera o falsa.**

4.2. Cuantificadores

- **Generalizador:**
  - **Las partículas "todo" (también "cada", en "cada entero tiene un factor primo", o "el" en "el hombre es un mamífero")**

  - **Formalización del enunciado "Todos los hombres son mortales":**
    1. **Para todo x, si x es un hombre entonces x es mortal.**

    2. **Para todo x, $(H(x) \to M(x))$.**
       donde "$H(x)$" simboliza "x es un hombre" y "$M(x)$" simboliza "x es mortal".

    3. $(\bigwedge x)(H(x) \to M(x))$.
       donde "$\bigwedge$" denota el cuantificador universal "para todo" y x es la *variable cuantificada*.

  - **La variable "x" en la fórmula $(H(x) \to M(x))$ se dice que está** *ligada* **por el cuantificador.**

- **Particularizador:**
  - **Las partículas "alguno" (también "existe", en "existe un número natural mayor que otro dado", o "algún", en "algún animal es racional", o "unos", en "unos hombres son mejores que otros", o "tiene" en "Juan tiene un progenitor que le ama")**

  - **Formalización del enunciado "Algún animal es racional":**
    1. **Existe un x, x es animal y x es racional.**

    2. **Existe un x, $(A(x) \wedge R(x))$.**
       donde "$A(x)$" simboliza "x es animal" y "$R(x)$" simboliza "x es racional".

3. $(\bigvee x)(A(x) \wedge R(x))$.
donde "$\bigvee$" denota el cuantificador existencial "existe un" y x es la *variable cuantificada*.

Observaciones 4.2.1

1. ***A partir de fórmulas abiertas podemos construir enunciados, anteponiendo una sucesión de cuantificadores con sus respectivas variables cuantificadas. Por ejemplo: de la fórmula abierta "$R(x, y)$" puede obtenerse el enunciado "$(\bigwedge x)(\bigvee y)R(x, y)$".***

2. ***Desde el punto de vista gráfico, el cuantificador universal, $\bigwedge$, es como un conjuntor grande, mientras que el cuantificador existencial, $\bigvee$, parece un disyuntor de gran tamaño. También a nivel intuitivo existe una semejanza funcional entre estos dos pares de símbolos. Si tenemos un conjunto finito $\{a, b, c\}$, el enunciado "$(\bigwedge x)R(x)$" equivale a "$R(a) \wedge R(b) \wedge R(c)$" y "$(\bigvee x)R(x)$" equivale a "$R(a) \vee R(b) \vee R(c)$".***

3. ***Existe una relación entre los cuantificadores: "$\neg(\bigwedge x)\neg$" es equivalente a "$(\bigvee x)$".***

4.3. Lenguaje formal de primer orden, $\mathcal{L}$

4.3.1. Vocabulario

1. **Símbolos comunes a todos los formalismos.**

   a) **Símbolos de variable, $\mathcal{V}$.**

   $$x, y, z, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$$

   b) **Conectivas y cuantificadores.**

   $$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

   $$\bigwedge, \bigvee .$$

   c) **Signos de puntuación: "(", ")", ",".**

2. **Símbolos peculiares de un formalismo.**

   a) **Constantes, $\mathcal{C}$.**

   $$a, b, c, a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_n, b_n, c_n$$

   b) **Functores n-ádicos, $\mathcal{F}$.**

   $$f^n, g^n, h^n, {f_0}^n, {g_0}^n, {h_0}^n, {f_1}^n, {g_1}^n, {h_1}^n, \ldots, {f_n}^n, {g_n}^n, {h_n}^n$$

   c) **Relatores n-ádicos, $\mathcal{P}$.**

   $$P^n, Q^n, R^n, {P_0}^n, {Q_0}^n, {R_0}^n, {P_1}^n, {Q_1}^n, {R_1}^n, \ldots, {P_n}^n, {Q_n}^n, {R_n}^n$$

Observaciones 4.3.1

1. ***Existen muchos lenguajes de primer orden diferentes, dependiendo de los símbolos peculiares que se incluyan.***

2. ***Los resultados que obtengamos serán aplicables a cualquier lenguaje de primer orden.***

4.3.2. Términos y fórmulas (*expresiones* de $\mathcal{L}$)

Definición 4.3.2 (término de $\mathcal{L}$) ***1. Si*** $t \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C}$ ***entonces*** t ***es un término. Esto es, toda variable o constante de*** $\mathcal{L}$ ***es un término de*** $\mathcal{L}$***.***

2. Si $t_1, t_2, \ldots t_n$ ***son términos de*** $\mathcal{L}$ ***y*** f^n ***es un functor*** n***-ádico de*** $\mathcal{L}$ ***entonces*** $f^n(t_1, t_2, \ldots t_n)$ ***es un término de*** $\mathcal{L}$***.***

Denotamos el conjunto de todos los términos mediante la letra $\mathcal{T}$***.***

Observación 4.3.3

Los términos serán las expresiones del lenguaje se interpretarán como objetos o individuos, los elementos sobre los se aplican las funciones, los elementos que tienen propiedades y sobre los que se realizan aseveraciones.

Definición 4.3.4 (fórmula atómica) ***Si*** $t_1, t_2, \ldots t_n$ ***son términos de*** $\mathcal{L}$ ***y*** R^n ***es un relator*** n***-ádico de*** $\mathcal{L}$ ***entonces*** $R^n(t_1, t_2, \ldots t_n)$ ***es una fórmula atómica de*** $\mathcal{L}$***.***

Observación 4.3.5

Las fórmulas atómicas se interpretarán como enunciados, como por ejemplo que un cierto objeto verifica una determinada propiedad.

Definición 4.3.6 (fórmula bien formada) ***1. Toda fórmula atómica de*** $\mathcal{L}$ ***es una fbf.***

2. Si $\mathcal{A}$ ***y*** $\mathcal{B}$ ***son fbf's de*** $\mathcal{L}$***, también lo son:*** $(\neg\mathcal{A}), (\neg\mathcal{B}), (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ***y*** $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$***.***

3. Si $\mathcal{A}$ ***es una fbf de*** $\mathcal{L}$ ***y*** $x \in \mathcal{V}$ ***entonces*** $(\bigwedge x)\mathcal{A}$ ***y*** $(\bigvee x)\mathcal{A}$ ***son fbf's.***

Observaciones 4.3.7

1. ***Notad que cuando decimos, "Si $\mathcal{A}$ es una fbf de $\mathcal{L}$ entonces $(\bigwedge x)\mathcal{A}$ y $(\bigvee x)\mathcal{A}$ son fbf's", la variable x es cualquier variable. No es necesario que haya una conexión entre la variable x y la fbf $\mathcal{A}$.***
2. ***En las anteriores definiciones hemos empleado variables metalingüisticas.***
3. ***A la hora de escribir fbf's de $\mathcal{L}$ tambien nos adherimos a las normas dictadas en la observación 1.4.2.***

Ejemplo 15 ***1. Ejemplos de variables de $\mathcal{L}$:***

$$x, y, z_1, x_{368}.$$

Ejemplos de cadenas de signos que no son variables de $\mathcal{L}$:

$$x', y_{iv}, \emptyset, \Gamma, F, \alpha, \mathcal{A}.$$

2. Ejemplos de constantes de $\mathcal{L}$:

$$a, b_0, b_{12}, c_{38}, c.$$

Ejemplos de cadenas de signos que no son constantes de $\mathcal{L}$:

$$h, 3, \text{``}a'', \boldsymbol{Sol}, n.$$

3. Ejemplos de términos (no variables o constantes) de $\mathcal{L}$:

$$f(g(a)), {f_0}^3(x, b, y), h(c), b_{12}, c_{38}, c.$$

Ejemplos de cadenas de signos que no son términos de $\mathcal{L}$:

$$F(x), 3, P^2(a, b), g(3).$$

4. Ejemplos de fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$:

$$R^2(a, f(g(a))), P(a), Q(b).$$

Ejemplos de cadenas de signos que no son fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$:

$$P(a) \wedge Q(b), x, y, F(x_1), x \textbf{\textit{ es azul}}, \mathcal{A}, P \vee Q.$$

5. Ejemplos de fórmulas (no atómicas) de $\mathcal{L}$:

$$\neg P(a), R^2(a, f(g(a))) \to Q(b), (\bigvee x)(R^2(x, h(c)) \to Q(x)).$$

Ejemplos de cadenas de signos que no son fórmulas de $\mathcal{L}$:

$$\neg f(a), (\exists x)(R^2(x, Q(b)), \mathcal{A} \vee \mathcal{B}.$$

4.3.3. Ocurrencia libre y ligada de una variable

Definición 4.3.8 ***1.*** *Radio de acción* ***de un cuantificador:***

a***) En la fbf*** $(\bigwedge x)\mathcal{A}$ ***el radio de acción de*** $(\bigwedge x)$ ***es*** $\mathcal{A}$***.***

b***) En la fbf*** $(\bigvee x)\mathcal{A}$ ***el radio de acción de*** $(\bigvee x)$ ***es*** $\mathcal{A}$***.***

2. Ocurrencia ligada de una variable.

Si aparece dentro del radio de acción de un cuantificador universal $(\bigwedge x)$ ***o uno existencial*** $(\bigvee x)$***.***

3. Ocurrencia libre de una variable.

Si su aparición no es ligada.

Ejemplo 16 ***En la fbf*** $(\bigwedge x_1)(R^2(x_1, x_2) \rightarrow (\bigwedge x_2)P^1(x_2))$***, podemos comprobar que:***

1. x_1 ***aparece ligada.***

2. La primera ocurrencias de x_2 ***aparece libre.***

3. La segunda ocurrencias de x_2 ***aparece ligada.***

4. El radio de acción del cuantificador $(\bigwedge x_1)$ ***es la fbf*** $(R^2(x_1, x_2) \rightarrow (\bigwedge x_2)P^1(x_2))$***.***

5. El radio de acción del cuantificador $(\bigwedge x_2)$ ***es la fbf*** $P^1(x_2)$***.***

Observación 4.3.9

Dada una fbf cualquiera $\mathcal{A}$***, escribiremos*** $\mathcal{A}(x_i)$ ***o bien*** $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$ ***cuando estemos interesados en ciertas variables. Estas expresiones indicarán a menudo, aunque no siempre, que las variables mencionadas aparecen libres en la fbf.***

4.4. Teoría de modelos

1. **La *semántica* estudia la adscripción de significado a los lenguajes de los sistemas formales.**
2. **En la teoría de modelos el significado se formaliza mediante la noción de *modelo***

3. **Un modelo consiste en una entidad matemática, junto con las propiedades y relaciones que se dan entre los elementos de esa entidad.**
4. **Estamos interesados en establecer la verdad o falsedad de ciertos hechos y propiedades del modelo.**

   /item El formalismo proporciona una sintaxis para la deducción de hechos (teoremas) sobre un modelo, basada en la *interpretación* **de los símbolos de la sintaxis en el modelo.**

4.4.1. Interpretaciones

- *Interpretar* **un formalismo básicamente consiste en seleccionar un modelo, esto es:**
  1. **Indicar un** *dominio* **o** *universo de discurso*; **es decir, un conjunto no vacio de individuos al que se referirán las variables.**
  2. **Asignar significados a los símbolos peculiares del formalismo: asignar a cada constante un individuo, a cada símbolo de función una función en el dominio y a cada relator una relación en el dominio.**

Definición 4.4.1 (Interpretación) ***Una interpretación*** $\mathcal{I}$ ***de*** $\mathcal{L}$ ***es un par*** $(\mathcal{D}_{\mathcal{I}}, \mathcal{J})$ ***que consiste en:***

1. ***Un conjunto no vacio*** $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$***, el dominio de*** $\mathcal{I}$***.***
2. ***Una aplicación*** $\mathcal{J}$ ***que asigna:***

   a) ***A cada símbolo de constante,*** a_i***, de*** $\mathcal{L}$ ***un elemento distinguido de*** $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$***;***

   $$\mathcal{J}(a_i) = \overline{a}_i$$

   b) ***A cada functor*** ${f^n}_i$ n***-ario de*** $\mathcal{L}$ ***una función***

   $$\mathcal{J}({f_i}^n) = \overline{f_i}^n$$

   tal que

   $$\overline{f_i}^n : \mathcal{D}_{\mathcal{I}}^n \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{I}}$$

   c) ***A cada relator*** R_i^n n***-ario de*** $\mathcal{L}$ ***una relación***

   $$\mathcal{J}({R_i}^n) = \overline{R_i}^n$$

   tal que

   $$\overline{R_i}^n \subset \mathcal{D}_{\mathcal{I}}^n$$

   esto es un conjunto de n***-tuplas de*** $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}^n$***,***

   $$\overline{R_i}^n = \{(d_1, \ldots, d_n) \mid d_i \in \mathcal{D}_{\mathcal{I}}\}$$

Observaciones 4.4.2

1. ***Notación: dado un símbolo de constante,*** a_i***, el valor asignado en el dominio lo denotamos*** $\overline{a}_i$***, etc.***

2. ***Muchos autores, [1, 5] entre otros, enuncian la última condición diciendo que: La interpretación asigna, por cada relator n-ario de $\mathcal{L}$ una aplicación $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}^n \longrightarrow \{V, F\}$.***

3. Lenguaje de primer orden

   Las variables $x, y, z, \ldots$ de $\mathcal{L}$ están destinadas a interpretarse como elementos del dominio $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$. Así mismo, los cuantificadores se refieren a variables interpretables en $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$.

Ejemplo 17 ***Dada la fbf***

$$(\bigwedge x_1)(\bigwedge x_2)(\bigvee x_3)R_1{}^2(g_1{}^2(x_1, x_3), x_2)$$

(con los símbolos peculiares: $a_1, R_1{}^2, f_1{}^1, g_1{}^2, g_2{}^2$).

Una posible interpretación sería aquella que asignase:

1. ***el conjunto de los naturales, $I\!N$, como dominio de la interpretación: $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} \equiv I\!N$.***

2. ***significados a los símbolos peculiares del lenguaje, de manera que:***

   - ***a a_1 le asignamos el elemento distinguido "0";***
   - ***a $f_1{}^1$ la función sucesor "suc"***

     $suc : I\!N \longrightarrow I\!N$

   - ***a $g_1{}^2$ la función suma "$+$"***

     $+ : I\!N^2 \longrightarrow I\!N$

   - ***a $g_2{}^2$ la función producto "$\times$"***

     $\times : I\!N^2 \longrightarrow I\!N$

   - ***a $R_1{}^2$ la relación de identidad "$=$"***

     $=: I\!N^2 \longrightarrow \{V, F\}$

Con lo cual la anterior fbf se interpretaría como:

(Para todo x_1 y $x_2 \in I\!N$ existe un $x_3 \in I\!N$ tal que $x_1 + x_3 = x_2$)

Esta fbf tiene un significado "falso" en esta interpretación (Imaginese el caso en el que $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$).

- **Sólo podremos hablar de verdad y falsedad en el contexto de una interpretación, después de asignar valores a las variables.**

Definición 4.4.3 (Valoración en $\mathcal{I}$) ***Una valoración v en $\mathcal{I}$ es una aplicación:***

$$\begin{array}{rccl} v: & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathcal{I}} \\ & x & \hookrightarrow & v(x) = \overline{x} \end{array}$$

Observaciones 4.4.4

1. ***Una valoración también recibe el nombre de*** *asignación*. ***En una interpretación existirán diferentes valoraciones.***
2. **Substitución**.

   Cuando estamos en el caso particular en el que $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ es el conjunto de los términos de $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$.

Definición 4.4.5 (Valoración x-equivalente) ***Una valoración ${v_x}^{\overline{x}}$ que coincide exáctamente con la valoración v, salvo quizá en el valor asignado a la variable $x \in \mathcal{V}$, se denomina valoración x-equivalente de v:***

$$v_x^{\overline{x}} = \begin{cases} \overline{x} & \textbf{\textit{si }} z \equiv x; \\ v(z) & \textbf{\textit{en otro caso.}} \end{cases}$$

Observaciones 4.4.6

1. ***El concepto anterior puede extenderse a una secuencia de variables: valoración $(x_1 \ldots x_n)$-equivalente.***

2. ***No es obligatorio que $v_x^{\overline{x}}$ tenga que diferir en el valor que v asigna a x.***

- **El concepto de valoración puede extenderse al conjunto de los términos.**

Definición 4.4.7 ***Una valoración ϑ en $\mathcal{I}$ es una aplicación:***

$$\vartheta : \ \mathcal{T} \ \longrightarrow \ \mathcal{D}_{\mathcal{I}}$$

tal que:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} (1) \ \ v(x) & \textbf{\textit{si}}\ t \in \mathcal{V} \wedge t \equiv x; \\ (2) \ \ \mathcal{J}(a) & \textbf{\textit{si}}\ t \in \mathcal{C} \wedge t \equiv a; \\ (3) \ \ \mathcal{J}(f_i^n)(\vartheta(t_1)\ldots\vartheta(t_n)) & \textbf{\textit{si}}\ f_i^n \in \mathcal{F} \wedge (t_1 \in \mathcal{T} \wedge \ldots \wedge t_n \in \mathcal{T}) \\ & \wedge \ t \equiv f_i^n(t_1 \ldots t_n); \end{cases}$$

1. **Una valoración tiene el efecto de transformar un fbf $\mathcal{A}$ en un enunciado acerca de los elementos de $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ que puede ser verdadero (V) o falso (F). Si el enunciado es verdadero, diremos que la valoración ϑ *satisface* $\mathcal{A}$ en $\mathcal{I}$.**

2. **La valoración ϑ hace corresponder un valor de verdad a la fbf $\mathcal{A}$.**

Definición 4.4.8 (Satisfacibilidad) ***Decimos que la valoración ϑ en $\mathcal{I}$ satisface la fbf $\mathcal{A}$ si y sólo si, inductivamente se cumple que:***

1. ***Si $\mathcal{A} \equiv \overline{R}^n(t_1 \ldots t_n)$ entonces***

   $$\overline{R}^n(\vartheta(t_1)\ldots\vartheta(t_n)) = V$$

   donde $\overline{R}^n = \mathcal{J}(R^n)$ es una relación en $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$.

2. ***Si $\mathcal{A}$ es de la forma:***

   a) ***$\neg\mathcal{B}$ entonces ϑ no satisface $\mathcal{B}$;***

   b) ***$(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ entonces ϑ satisface $\mathcal{B}$ y ϑ satisface $\mathcal{C}$;***

c) $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ *entonces* ϑ *satisface* $\mathcal{B}$ *o* ϑ *satisface* $\mathcal{C}$*;*

d) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ *entonces* ϑ *satisface* $\neg\mathcal{B}$ *o* ϑ *satisface* $\mathcal{C}$*;*

e) $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$ *entonces* ϑ *satisface* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$*, o* ϑ *no satisface ni* $\mathcal{B}$ *ni* $\mathcal{C}$*;*

3. ***Si*** $\mathcal{A} \equiv (\bigwedge x)\mathcal{B}$***, para*** **toda** ***valoración*** $\vartheta_x^{\overline{x}}$ x***-equivalente de*** ϑ, $\vartheta_x^{\overline{x}}$ ***satisface*** $\mathcal{B}$***.***

4. ***Si*** $\mathcal{A} \equiv (\bigvee x)\mathcal{B}$***, para*** **alguna** ***valoración*** $\vartheta_x^{\overline{x}}$ x***-equivalente de*** ϑ, $\vartheta_x^{\overline{x}}$ ***satisface*** $\mathcal{B}$***.***

Observaciones 4.4.9

1. ***Para una valoración*** ϑ ***en*** $\mathcal{I}$ ***y una fbf*** $\mathcal{A}$ ***de*** $\mathcal{L}$ ***cualesquiera, o*** ϑ ***satisface*** $\mathcal{A}$ ***o*** ϑ ***satisface*** $\neg\mathcal{A}$

2. ***El segundo punto de la definición 4.4.8, puede entenderse mejor en los siguientes términos: Si*** $\mathcal{A}$ ***es de la forma:*** $\neg\mathcal{B}$, ***o*** $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$, ***o*** $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$, ***o*** $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$, ***o*** $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$. ***Al ser interpretada y valorada*** $\mathcal{A}$ ***toma un valor de verdad*** V ***o*** F ***en función los valores de verdad que tomem*** $\mathcal{B}$ ***y*** $\mathcal{C}$ ***de acuerdo con la siguiente tabla de verdad:***

$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\neg\mathcal{B}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$	$\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Decimos que ϑ ***satisface*** $\mathcal{A}$ ***si como resultado de su valoración en una interpretación,*** $\mathcal{A}$ ***toma el valor de verdad*** V. ***En caso contrario, cuando*** $\mathcal{A}$ ***toma el valor de verdad*** F, ***decimos que*** ϑ ***no satisface*** $\mathcal{A}$.

3. ***El punto tercero de la anterior definición 4.4.8, puede entenderse como:***

   La fórmula $\mathcal{A} \equiv (\bigwedge x)\mathcal{B}$ ***se evalua a*** V ***si*** $\mathcal{B}$ ***se evalua siempre a*** V ***al sustituir las ocurrencias de*** x ***en*** $\mathcal{B}$ ***por cada uno de los elementos*** $\overline{x}$ ***de*** $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$. ***De otro modo se evalua a*** F.

4. ***El punto cuarto de la anterior definición 4.4.8, puede entenderse como:***

La fórmula $\mathcal{A} \equiv (\bigvee x)\mathcal{B}$ se evalua a V si $\mathcal{B}$ se evalua a V al menos para un elemento $\overline{x}$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$ que se sustituye por las ocurrencias de x en $\mathcal{B}$. De otro modo se evalua a F.

Ejemplo 18 ***En nuestra interpretación de la aritmética del ejemplo 17 la fbf:***

1. $R_1{}^2(g_2{}^2(x_1, x_2), g_2{}^2(x_3, x_4))$
   es satisfecha por la valoración $v(x_1) = 2, v(x_2) = 6, v(x_3) = 3, v(x_4) = 4$***. En cambio, la valoración*** $w((x_1) = 2, w(x_2) = 5, w(x_3) = 4, w(x_4) = 2$ ***no la satisface.***

2. $(\bigwedge x_1)(\bigwedge x_2)R_1{}^2(g_2{}^2(x_1, x_2), g_2{}^2(x_2, x_1))$
   es satisfecha por cualquier valoración v***.***

3. $(\bigwedge x_1)R_1{}^2(x_1, a_1)$
   no es satisfecha por valoración v ***alguna.***

Definición 4.4.10 (Verdad en $\mathcal{I}$) ***1. Una fbf $\mathcal{A}$ es*** verdadera ***en $\mathcal{I}$ si y sólo si toda valoración ϑ en $\mathcal{I}$ satisface $\mathcal{A}$.***

2. Una fbf $\mathcal{A}$ es falsa ***en $\mathcal{I}$ si y sólo si no existe valoración ϑ en $\mathcal{I}$ que satisfaga $\mathcal{A}$.***

Observaciones 4.4.11

1. ***Escribiremos $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ para denotar que $\mathcal{A}$ es verdadera en $\mathcal{I}$. Este símbolo no debe confundirse con "$\vdash$". Ambos son símbolos metalingüisticos.***

2. ***Puede ocurrir que para cierta fbf $\mathcal{A}$, algunas valoraciones en $\mathcal{I}$ satisfagan $\mathcal{A}$ y otras no. Una fórmula así no es ni verdadera ni falsa en $\mathcal{I}$.***

3. ***En una interpretación dada, una fbf $\mathcal{A}$ es falsa en $\mathcal{I}$ si y sólo si $\neg\mathcal{A}$ es verdadera en $\mathcal{I}$. Es decir, para ninguna fbf $\mathcal{A}$ puede ocurrir que $\mathcal{A}$ y $\neg\mathcal{A}$ sean ambas verdaderas en $\mathcal{I}$.***
4. ***En una interpretación dada $\mathcal{I}$, una fbf $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es falsa en $\mathcal{I}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es verdadera en $\mathcal{I}$ y $\mathcal{B}$ es falsa en $\mathcal{I}$.***
5. ***Es facil comprobar que si las fbf $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ son verdaderas en $\mathcal{I}$ entonces $\mathcal{B}$ es verdadera en $\mathcal{I}$.***

- **Algunos resultados interesantes sobre el concepto de verdad en una interpretación:**

Proposición 4.4.12 ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$. Entonces, $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{I} \models (\bigwedge x)\mathcal{A}$.***

Corolario 4.4.13 ***Sean $y_1, \ldots, y_n$ variables de $\mathcal{L}$, sea $\mathcal{A}$ una fbf de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$. Entonces, $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{I} \models (\bigwedge y_1) \ldots (\bigwedge y_n)\mathcal{A}$.***

- **En lo que resta de sección trataremos con fórmulas cerradas.**
- **El valor de verdad de una fórmula cerrada no depende de la valoración concreta v en $\mathcal{I}$. Si encontramos una valoración v que satisface una fórmula en $\mathcal{I}$ entonces cualquier otra valoración también la satisfará.**

Lema 4.4.14 ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$. Si v y w son valoraciones tales que $v(y) = w(y)$ para toda variable libre y que ocurre en $\mathcal{A}$, entonces v satisface $\mathcal{A}$ si y sólo si w satisface $\mathcal{A}$.***

Proposición 4.4.15 ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf cerrada de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$. Entonces, $\mathcal{I} \models \mathcal{A}$ o $\mathcal{I} \models \neg\mathcal{A}$.***

Observación 4.4.16

La anterior proposición establece que, para una fórmula cerrada los conceptos de satisfacible para una valoración v en $\mathcal{I}$ y verdadera en $\mathcal{I}$ son equivalentes. Las interpretaciones dan valores de verdad a las fbf's cerradas de $\mathcal{L}$.

4.4.3. Verdad lógica y modelos

- **En nuestro sistema actual $\mathcal{L}$ la noción de interpretación se corresponde con la de asignación de valores de verdad en L. Vamos a ver que el concepto de tautología en L tiene un correlato en $\mathcal{L}$: el de fórmula lógicamente verdadera.**

Definición 4.4.17 (Fórmula lógicamente válida) ***Sea una fbf $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$.***

1. ***$\mathcal{A}$ es*** *lógicamente válida* ***si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ es verdadera en $\mathcal{I}$. (NOTACION: $\models \mathcal{A}$)***
2. ***$\mathcal{A}$ es*** *insatisfacible* ***si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$ es falsa en $\mathcal{I}$.***
3. ***$\mathcal{A}$ es*** *satisfacible* ***si y sólo si existe una interpretación $\mathcal{I}$ y una valoración en $\mathcal{I}$ tal que v satisface $\mathcal{A}$ en $\mathcal{I}$.***

- **Para fbf's cerradas los conceptos de satisfación por una valoración en $\mathcal{I}$ y verdad en $\mathcal{I}$ son equivalentes.**
- **Una fbf cerrada $\mathcal{A}$ es** *satisfacible* **si y sólo si existe una interpretación $\mathcal{I}$ en la cual $\mathcal{A}$ sea verdadera.**

Definición 4.4.18 (Modelo) ***Dada una fbf cerrada $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$, decimos que una interpretación $\mathcal{I}$ es*** *modelo* ***de $\mathcal{A}$ si y sólo si la fbf $\mathcal{A}$ es verdadera en la interpretación $\mathcal{I}$.***

Definición 4.4.19 ***Sea Γ un conjunto de fbf's cerradas de $\mathcal{L}$, sea $\mathcal{I}$ una interpretación de $\mathcal{L}$. $\mathcal{I}$ es*** *modelo* ***de Γ si y sólo si $\mathcal{I}$ es*** *modelo* ***para cada una de las fórmulas de Γ.***

Definición 4.4.20 ***Sea Γ un conjunto de fbf's cerradas de $\mathcal{L}$.***

1. ***Γ es*** *válido* ***si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$ es modelo de Γ.***

2. Γ ***es*** *insatisfacible* ***si y sólo si no existe una interpretación*** $\mathcal{I}$ ***de*** $\mathcal{L}$ ***que sea modelo de*** Γ***.***

3. Γ ***es*** *satisfacible* ***si y sólo si existe una interpretación*** $\mathcal{I}$ ***de*** $\mathcal{L}$ ***que es modelo de*** Γ***.***

Observaciones 4.4.21

1. ***El concepto semántico de conjunto de fórmulas satisfacible (insatisfacible) está relacionado con el concepto sintáctico de conjunto de fórmulas consistente (inconsistente).***

2. ***Sea*** $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ ***un conjunto de fbf's cerradas.***

   a***)*** $\mathcal{I}$ ***es modelo de*** Γ ***si y sólo si*** $\mathcal{I}$ ***es modelo de*** $(\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n)$***.***

   b***)*** Γ ***es válido si y sólo si*** $(\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n)$ ***es lógicamente válida.***

4.4.4. Consecuencia lógica e Independencia

Definición 4.4.22 (Consecuencia lógica) ***$\mathcal{A}$ es consecuencia lógica de Γ si y sólo si para toda interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$, si $\mathcal{I}$ es modelo de Γ entonces $\mathcal{I}$ es modelo de $\mathcal{A}$.***

Observación 4.4.23

Que Γ y $\mathcal{A}$ están en relación de consecuencia lógica se denota habitualmente por: $\Gamma \models \mathcal{A}$.

- **Al igual que en el capítulo 1 establecíamos una correspondencia entre forma argumentativa válida y tautología, ahora estableceremos una correspondencia similar entre los conceptos de consecuencia lógica y fórmula lógicamente verdadera.**

Proposición 4.4.24 (Teorema de la deducción semántica) ***Sea $\Gamma = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}\}$ un conjunto de fbf's cerradas y $\mathcal{B}$ una fbf cerrada de $\mathcal{L}$.***

1. ***$\Gamma \models \mathcal{B}$ si y sólo si $\models (\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{B}$***
2. ***$\Gamma \models \mathcal{B}$ si y sólo si $\not\models (\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \neg\mathcal{B})$ (esto es, la fbf $(\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \neg\mathcal{B})$ es insatisfacible).***
3. ***$\Gamma \models \mathcal{B}$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\mathcal{B}\}$ es insatisfacible.***

Proposición 4.4.25 (Caracterización de la insatisfacibilidad) ***Sea Γ un conjunto de fbf's cerradas de $\mathcal{L}$. Γ es insatisfacible si y sólo si existe una fbf cerrada $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$, tal que $\Gamma \models (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A})$.***

- **Independencia.**

Definición 4.4.26 ***Sea Γ un conjunto de fbf's de $\mathcal{L}$. Una fbf $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es*** *independiente* ***de Γ si y sólo si $\Gamma \not\models \mathcal{A}$.***

Definición 4.4.27 ***Sea*** Γ ***un conjunto de fbf's de*** $\mathcal{L}$***.*** Γ ***es*** *independiente* ***si y sólo si para todo*** $\mathcal{A} \in \Gamma$***,*** $\mathcal{A}$ ***es independiente de*** $\Gamma \setminus \{\mathcal{A}\}$***.***

- **Si sospechamos que una determinada argumentación o una prueba es correcta, la formalizaremos tratando de obtener una deducción de su conclusión a partir de sus premisas. Si por el contrario, sospechamos que es incorrecta, hemos de tratar de obtener una prueba de independencia de su conclusión respecto de sus premisas.**

Ejemplo 19 ***Sean las fbf's***

$$\mathcal{A}_1 \equiv (\bigwedge x)(P(x) \to R(x))$$

$$\mathcal{A}_2 \equiv \neg P(x)$$

y

$$\mathcal{A}_3 \equiv \neg R(a)$$

Vamos a comprobar que $\mathcal{A}_3$ ***es independiente del conjunto*** $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$***. Para ello basta construir la interpretación*** $\mathcal{I}$***:***

- $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} = \{0\}$***,***
- $\mathcal{J}(a) = 0$***,***
- $\mathcal{J}(P) = \emptyset$ ***(esto es,*** $\overline{P}(0) = F$***),***
- $\mathcal{J}(R) = \{0\}$ ***(esto es,*** $\overline{R}(0) = V$***).***

Es facil comprobar que $\mathcal{I}$ ***es modelo de*** $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ ***pero no de*** $\mathcal{A}_3$***.***

Capítulo 5

CALCULO DE PREDICADOS: TEORIA DE LA DEMOSTRACION.

- **En este capítulo analizaremos los aspectos sintácticos del lenguaje.**

- **Procederemos como en capítulos anteriores, estudiando:**
  1. **Un sistema formal axiomático que denominamos $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$.**
     (Nos centraremos en sus propiedades formales.)

  2. **Un sistema de deducción natural de tipo Gentzen.**
     (Nos centraremos en su utilización como herramienta deductiva.)

5.1. Sistema formal axiomático $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$

- **El sistema formal axiomático $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ puede considerarse como una extensión del sistema formal L.**

Definición 5.1.1 ***El*** *sistema formal $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ del cálculo de predicados* ***está caracterizado por:***

1. Vocabulario***:***

a***) Símbolos comunes a todos los formalismos.***

1) Conjunto de símbolos de variable $\mathcal{V}$.

$x, y, z, x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$

2) Conectivas y cuantificadores.

$\neg, \rightarrow$.

$\bigwedge$.

3) Signos de puntuación: "(", ")", ",".

b***) Símbolos peculiares de un formalismo.***

1) El conjunto de las constantes $\mathcal{C}$.

$a, b, c, a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_n, b_n, c_n$

2) El conjunto de los functores n-ádicos $\mathcal{F}$.

$f^n, g^n, h^n, {f_0}^n, {g_0}^n, {h_0}^n, {f_1}^n, {g_1}^n, {h_1}^n, \ldots, {f_n}^n, {g_n}^n, {h_n}^n$

3) El conjunto de los relatores n-ádicos $\mathcal{P}$.

$P^n, Q^n, R^n, {P_0}^n, {Q_0}^n, {R_0}^n, {P_1}^n, {Q_1}^n, {R_1}^n, \ldots, {P_n}^n, {Q_n}^n, {R_n}^n$

2. Términos y fórmulas*:*

a*) **El conjunto de los términos** $\mathcal{T}$**.***

1)** **Si** $t \in \mathcal{V} \cup \mathcal{C}$ **entonces** t **es un término.

2)** **Si** $t_1, t_2, \ldots t_n$ **son términos y** f^n **es un functor** n**-ádico entonces** $f^n(t_1, t_2, \ldots t_n)$ **es un término.

b*) **El conjunto de las fbf's.***

1)** **Si** $t_1, t_2, \ldots t_n$ **son términos y** R^n **es un relator** n**-ádico de** $\mathcal{L}$ **entonces** $R^n(t_1, t_2, \ldots t_n)$ **es una fbf.

2)** **Si** $\mathcal{A}$ **y** $\mathcal{B}$ **son fbf's, también lo son:** $(\neg\mathcal{A}), (\neg\mathcal{B})$ **y** $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$**.

3)** **Si** $\mathcal{A}$ **es una fbf y** $x \in \mathcal{V}$ **entonces** $(\bigwedge x)\mathcal{A}$ **es una fbf.

3. Definiciones*:*

$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	***es abreviatura de:***	$(\neg(\mathcal{A} \to (\neg\mathcal{B})))$
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	***es abreviatura de:***	$((\neg\mathcal{A}) \to \mathcal{B})$
$(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$	***es abreviatura de:***	$(\neg((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\neg(\mathcal{B} \to \mathcal{A}))))$
$(\bigvee x)\mathcal{A}$	***es abreviatura de:***	$(\neg((\bigwedge x)(\neg\mathcal{A})))$

4. Axiomas***: Cualesquiera que sean las fbf's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, las siguientes fbf's son axiomas de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$***

(***K1)*** $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$
(***K2)*** $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$
(***K3)*** $(((\neg\mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$
(***K4)*** $((\bigwedge x)\mathcal{A} \to \mathcal{A})$, ***si*** x ***no aparece libre en*** $\mathcal{A}$
(***K5)*** $((\bigwedge x)\mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}(t))$, ***si*** t ***no introduce variables ligadas en*** $\mathcal{A}$
(***K6)*** $(\bigwedge x)(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to (\bigwedge x)\mathcal{B})$, ***si*** x ***no aparece libre en*** $\mathcal{A}$

5. Reglas de inferencia***: Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbf's cualesquiera.***

a*)* *Modus ponens* ***(MP): de $\mathcal{A}$ y*** $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ ***se puede inferir como consecuencia inmediata $\mathcal{B}$,***

b*)* *Generalización* ***(Gen): de $\mathcal{A}$ se puede inferir como consecuencia inmediata*** $(\bigwedge x)\mathcal{A}$***, siendo*** x ***cualquier variable.***

Observaciones 5.1.2

1. ***Los esquemas de axiomas y las reglas de inferencia del sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ incluyen los del sistema* L.**

2. ***Los esquemas de axiomas K4 y K5 pueden entenderse como reglas de particularización o de eliminación del cuantificador universal "$\bigwedge$".***

3. ***El esquema de axiomas K6 puede entenderse como una ley de distribución del cuantificador universal "$\bigwedge$".***

4. ***La regla de inferencia Gen puede entenderse como una regla de introducción del cuantificador universal.***

Ejemplo 20 $\vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} (\bigwedge x)(P(x) \to P(x))$.

(1)	$((P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x))) \to$	
	$((P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x))))$	***K2 ($\mathcal{B}$ por** $(P(x) \to P(x))$ **y $\mathcal{C}$ por** $P(x)$**)***
(2)	$(P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x)))$	***K1 ($\mathcal{B}$ por** $(P(x) \to P(x))$
(3)	$((P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x)))$	***MP, (1), (2)***
(4)	$(P(x) \to (P(x) \to P(x)))$	***L1 ($\mathcal{B}$ por** $P(x)$
(5)	$(P(x) \to P(x))$	***MP, (3), (4)***
(6)	$(\bigwedge x)(P(x) \to P(x))$	***Gen (5)***

5.2. Propiedades formales de la lógica de predicados: metalógica.

5.2.1. Corrección y consistencia

- **El concepto en $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ correspondiente al de *tautología* en L es el de *verdad lógica*.**

- **Para probar la corrección del sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, debemos probar que todo teorema de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ es una fórmula lógicamente verdadera.**

- **La demostración sigue un camino paralelo al de la prueba de la corrección para el sistema L.**

- **Necesitamos algunas definiciones y resultados previos:**
  - *$\mathcal{A}$ procede de $\mathcal{A}_0$ por sustitución.*

    Ejemplo 21 ***La fórmula***

    $$((\bigwedge x)P(x) \to (\bigwedge x)P(x))$$

    de $\mathcal{L}$, procede por sustitución de la fórmula $(p_1 \to p_1)$ de L.

  - **Este concepto nos da la posibilidad de extender la noción de tautología a las fbf's de $\mathcal{L}$.**

    Definición 5.2.1 ***Una fbf $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es una* tautología *si proviene por sustitución de una tautología de L.***

Proposición 5.2.2 ***Si una fbf $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es una*** *tautología* ***entonces es lógicamente verdadera.***

Observación 5.2.3 ***Puede demostrarse que si ls fbf $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ es una tautología, entonces $\mathcal{A}$ es un teorema de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Notad que, al contrario que sucede en el sistema formal L, la afirmación reciproca es falsa. Basta pensar en el axioma K4 que es un teorema de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, pero que no es una tautología de $\mathcal{L}$.***

- **El resultado siguiente:**

  Proposición 5.2.4 ***Todos los casos particulares de los esquemas de axioma en $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ son fórmulas lógicamente verdaderas.***

- **Junto con el hecho de que las reglas de inferencia del sistema transmiten la propiedad de ser lógicamente verdaderas a las fórmulas inferidas, permite demostrar el teorema de la corrección:**

Teorema 5.2.5 (Teorema de la corrección para $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$) ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf de $\mathcal{L}$. Si $\vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} \mathcal{A}$ entonces $\models \mathcal{A}$.***

Corolario 5.2.6 ***El sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ es consistente.***

5.3. Teorema de la deducción.

- **Realizar demostraciones en el sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ es tan complicado o más que lo era en el sistema L, por eso de nuevo buscamos métodos que nos ayuden en nuestra tarea de deducir.**

- **En el sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ también existe un teorema de la deducción, pero que es algo más compleja.**

- **Veamos un ejemplo que ilustra el porqué de esta mayor complicación.**

  Ejemplo 22 ***Para toda fbf $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} (\bigwedge x)\mathcal{A}$. Sin embargo, no es cierto que $\vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} (\mathcal{A} \to (\bigwedge x)\mathcal{A})$.***

  (Basta una prueba de independencia en la que:

  - $\mathcal{A} \equiv P(x)$***;***

  - $\mathcal{I}$ ***una interpretación cuyo universo de discurso es el conjunto de los números enteros*** Z***;***

  - ***Interpretamos el relator*** P ***como el predicado "$\ldots = 0$".)***

Proposición 5.3.1 ***Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbf's de $\mathcal{L}$ y Γ un conjunto de fbf's de $\mathcal{L}$ (que puede ser vacio). Si $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} \mathcal{B}$ y si la deducción no contiene aplicaciones de la regla de generalización, con respecto a una variable que aparezca libre en $\mathcal{A}$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.***

- **La condición referente al uso de la generalización puede eliminarse, exigiendo que la fbf $\mathcal{A}$, de la proposición 5.3.1, sea cerrada.**

  Corolario 5.3.2 ***Si $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$*** *es una fbf cerrada*, ***entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.***

- **Al igual que sucedia en el sistema L, el teorema de la deducción para $\mathcal{K}_\mathcal{L}$ tiene su reciproco:**

  Proposición 5.3.3 ***Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ fbf's de $\mathcal{L}$ y Γ un conjunto de fbf's de $\mathcal{L}$. Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ entonces $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} \mathcal{B}$.***

- **Partiendo de los anteriores resultados, obtenemos:**

  Corolario 5.3.4 (Silogismo hipotético (SH)) ***Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ fbf's de $\mathcal{L}$.***

  $$\{(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_{\mathcal{K}_\mathcal{L}} (\mathcal{A} \to \mathcal{C}).$$

Observaciones 5.3.5

1. ***El reciproco del teorema de la deducción no ha necesitado de ninguna condición que lo debilita.***

2. ***La regla SH puede aplicarse legitimamente en el sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$.***

3. ***Otras facilidades para la deducción que siguen siendo legitimas en $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$:***

   a) ***La introducción de teoremas en cualquier línea de una demostración;***

   b) ***el uso del teorema de intercambio, válido.***

Ejemplo 23

1. $\vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} (\bigwedge x)(P(x) \to P(x))$.

(1)	$(P(x) \to P(x))$	***Teorema de la identidad***
(2)	$(\bigwedge x)(P(x) \to P(x))$	***Gen (1)***

2. $\{(\bigwedge x)(P(x) \to Q(x)), \neg Q(a)\} \vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} \neg P(a)$.

(1)	$(\bigwedge x)(P(x) \to Q(x))$	***P***
(2)	$\neg Q(a)$	***P***
(3)	$((\bigwedge x)(P(x) \to Q(x)) \to (P(a) \to Q(a)))$	***K5***
(4)	$P(a) \to Q(a)$	***MP (1), (3)***
(5)	$(\neg\neg P(a) \to \neg\neg Q(a)) \to (\neg Q(a) \to \neg P(a))$	***K3***
(6)	$(P(a) \to Q(a)) \to (\neg Q(a) \to \neg P(a))$	$I^2, (\neg\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A})$, ***(5)***
(7)	$\neg Q(a) \to \neg P(a)$	***MP (4), (6)***
(8)	$\neg P(a)$	***MP (2), (7)***

5.3.1. Completitud

Teorema 5.3.6 (Teorema de la completitud) ***Sea $\mathcal{A}$ una fbf de $\mathcal{L}$. Si $\models \mathcal{A}$ entonces $\vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} \mathcal{A}$.***

Observaciones 5.3.7

1. ***Ver [4] para una prueba inspirada en la de Henkin.***
2. ***Nuevamente, los teoremas 5.2.5 y 5.3.6 confirman la equivalencia entre los conceptos semánticos y sintácticos.***
3. ***La completitud es deseable pero no es una propiedad general de los sistemas formales. La lógica de segundo orden no es completa (Gödel).***

5.3.2. Deducidibilidad y consecuencia lógica

- **Para fbf's cerradas existe equivalencia entre el concepto sintáctico de deducción y el concepto semántico de consecuencia lógica.**

Proposición 5.3.8 ***Sea Γ un conjunto de fbf's cerradas y $\mathcal{A}$ una fbf cerrada de $\mathcal{L}$. $\Gamma \models \mathcal{A}$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}} \mathcal{A}$.***

Proposición 5.3.9 ***Sea Γ un conjunto de fbf's cerradas y $\mathcal{A}$ una fbf cerrada de $\mathcal{L}$. Γ es insatisfacible si y sólo si Γ es inconsistente.***

5.3.3. El problema de la indecidibilidad de la lógica de predicados

Definición 5.3.10 (indecidibilidad) ***Un sistema formal S es (recursivamente)*** *indecidible* ***si y sólo si, no existe ningún algoritmo que pueda responder a preguntas de la clase:***

> ***¿ Es $\mathcal{A}$ un teorema de S?, donde $\mathcal{A}$ es una fbf de S.***

En caso contrario diremos que el sistema es *decidible****.***

- **En el estudio de las propiedades formales que hemos discutido hasta el momento el lenguaje $\mathcal{L}$ ha sido genérico.**

- **Sin embargo, el sistema $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ es o no indecidible dependiendo del lenguaje $\mathcal{L}$ seleccionado.**

Proposición 5.3.11 ***Existe un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ es (recursivamente) indecidible.***

Corolario 5.3.12 ***El cálculo de predicados de primer orden, con todos sus símbolos, es (recursivamente) indecidible.***

- **La indecidibilidad es la regla más bien que la excepción. A continuación se dan algunos ejemplos que indican que la indecidibilidad es lo más usual en $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ y en extensiones de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ que conforman sistemas matemáticos significativos:**

  1. Sistemas indecidibles:

  ***a*) El sistema $\mathcal{N}$: $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ extendido con los axiomas de Peano.**

  ***b*) $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ con un lenguaje $\mathcal{L}$ que contiene por lo menos un functor binario y un relator binario, ademas de una lista infinita de constantes.**

  ***c*) La teoría de grupos de primer orden.**

  ***d*) La teoría de anillos de primer orden.**

  ***e*) La teoría de cuerpos de primer orden.**

  ***f*) La teoría de semigrupos de primer orden.**

  ***g*) El sistema de Zermelo/Fraenkel (ZF), que axiomatiza la teoría de conjuntos.**

  2. Sistemas decidibles:

  ***a*) El cálculo de predicados puro: $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ con un lenguaje $\mathcal{L}$ que sólamente contiene relatores unarios.**

  ***b*) La teoría de grupos abelianos de primer orden.**

  ***c*) La aritmética de primer orden sin multiplicación.**

Observación 5.3.13 ***La indecidibilidad de $\mathcal{N}$ y ZF implica que no existe ningún programa que pueda usarse para decidir si los enunciados matemáticos, en general, son teoremas o no.***

5.4. Sistema de deducción natural

- **Vamos a extender el sistema de Gentzen (capítulo 3) con las reglas de inferencia apropiadas para tratar fórmulas con cuantificadores.**

5.4.1. Sustituciones

- **Para formalizar adecuadamente las reglas de inferencia de nuestro sistema de deducción natural vamos a introducir el concepto de sustitución.**

- **Este concepto también se empleado para formalizar otros muchos conceptos.**

Definición 5.4.1 (Sustitución) ***Una*** *sustitución* σ ***es una aplicación que asigna a cada variable*** x ***del conjunto de las variables*** $\mathcal{V}$ ***de*** $\mathcal{L}$ ***un término*** $\sigma(x)$ ***del conjunto de los términos*** $\mathcal{T}$ ***de*** $\mathcal{L}$***.***

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & x & \hookrightarrow & \sigma(x) \end{array}$$

- **Es habitual representar las sustituciones como conjuntos finitos de la forma**

  $$\{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots x_n/t_n\}$$

- **Nomenclatura:**
  - **Dominio de una sustitución.**

  - **Rango de la sustitución.**

  - **Sustitución identidad (vacia).**

  - **Sustitución básica.**

Ejemplo 24 ***Ejemplos de sustituciones son:***

$\theta_1 \equiv \{x/f(z), z/y\}\theta_2 \equiv \{x/a, y/g(y), z/f(g(b))\}$

- **El dominio de las sustituciones se puede ampliar a los términos y a las fbf's.**

- **Es habitual representar la aplicación de una sustitución σ a una expresión $\mathcal{E}$, mediante la notación $\mathcal{E}\sigma$" en lugar de la más común $\sigma(\mathcal{E})$".**

Definición 5.4.2 (Sust. de una variable por un término) ***Sean*** u***,*** x ***y*** z ***variables,*** a ***un símbolo constante,*** f^n ***un functor*** n***-ario,*** $t, t_1, \ldots, t_n$ ***términos,*** P^n ***un relator*** n***-ario, y*** $\mathcal{A}$ ***y*** $\mathcal{B}$ ***fbf's cualesquiera.***

$$(1) \quad z\{x/t\} = \begin{cases} t & \textbf{\textit{si }} x \equiv z\textbf{\textit{;}} \\ z & \textbf{\textit{en otro caso.}} \end{cases}$$

$$(2) \quad a\{x/t\} = a.$$

$$(3) \quad f^n(t_1, \ldots, t_n)\{x/t\} = f^n(t_1\{x/t\}, \ldots, t_n\{x/t\}).$$

$$(4) \quad P^n(t_1, \ldots, t_n)\{x/t\} = P^n(t_1\{x/t\}, \ldots, t_n\{x/t\}).$$

$$(5) \quad (\neg\mathcal{A})\{x/t\} = \neg(\mathcal{A}\{x/t\}).$$

$$(6) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})\{x/t\} = ((\mathcal{A}\{x/t\}) \wedge (\mathcal{B}\{x/t\})).$$

$$(7) \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})\{x/t\} = ((\mathcal{A}\{x/t\}) \vee (\mathcal{B}\{x/t\})).$$

$$(8) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})\{x/t\} = ((\mathcal{A}\{x/t\}) \rightarrow (\mathcal{B}\{x/t\})).$$

$$(9) \quad (\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})\{x/t\} = ((\mathcal{A}\{x/t\}) \leftrightarrow (\mathcal{B}\{x/t\})).$$

$$(10) \quad ((\bigwedge z)\mathcal{A})\{x/t\} = \begin{cases} (a) \quad (\bigwedge z)\mathcal{A} & \textbf{\textit{si }} x \textbf{\textit{ no está libre en }} (\\ (b) \quad (\bigwedge z)(\mathcal{A}\{x/t\}) & \textbf{\textit{si }} x \textbf{\textit{ está libre en }} (\bigwedge z) \\ & \textbf{\textit{y }} z \textbf{\textit{ no está libre en }} t\textbf{\textit{;}} \\ (c) \quad (\bigwedge z)((\mathcal{A}\{z/u\})\{x/t\}) & \textbf{\textit{si }} x \textbf{\textit{ está libre en }} (\bigwedge z) \\ & \textbf{\textit{y }} z \textbf{\textit{ está libre en }} t \\ & \textbf{\textit{y }} u \textbf{\textit{ no está en }} (\bigwedge z)\mathcal{A} \end{cases}$$

$$(11) \quad ((\bigvee z)\mathcal{A})\{x/t\} = \begin{cases} (a) \quad (\bigvee z)\mathcal{A} & \textbf{\textit{si }} x \textbf{\textit{ no está libre en }} (\\ (b) \quad (\bigvee z)(\mathcal{A}\{x/t\}) & \textbf{\textit{si }} x \textbf{\textit{ está libre en }} (\bigvee z) \\ & \textbf{\textit{y }} z \textbf{\textit{ no está libre en }} t\textbf{\textit{;}} \\ (c) \quad (\bigvee z)((\mathcal{A}\{z/u\})\{x/t\}) & \textbf{\textit{si }} x \textbf{\textit{ está libre en }} (\bigvee z) \\ & \textbf{\textit{y }} z \textbf{\textit{ está libre en }} t \\ & \textbf{\textit{y }} u \textbf{\textit{ no está en }} (\bigvee z)\mathcal{A} \end{cases}$$

Observación 5.4.3 ***En la definición 5.4.2, los puntos 10(c) y 11(c) pueden entenderse, de manera informal, diciendo que antes de aplicar la sustitución*** $\{x/t\}$ ***conviene renombrar las variables ligadas.***

- **La definición 5.4.2 se ha restringido a una sustitución de una variable** $\{x/t\}$ **para no complicar la notación.**

- **Generalización: Para una sustitución** $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots x_n/t_n\}$, **la expresión** $\mathcal{E}\theta$ **se obtiene reemplazando simultaneamente cada ocurrencia de** x_i **en la expresión** $\mathcal{E}$, **siguiendo las reglas de la definición 5.4.2.**

Ejemplo 25 ***Sea*** $\mathcal{A} \equiv (\bigwedge w)(P(x) \wedge H(w) \to (\bigvee x)R(x, z))$**.**

- $\mathcal{A}\{z/x\}\{x/f(c)\} \equiv (\bigwedge w)(P(f(c)) \wedge H(w) \to (\bigvee y)R(y, f(c))$
- $\mathcal{A}\{w/f(g(a)), z/g(x)\} \equiv (\bigwedge w)(P(x) \wedge H(w) \to (\bigvee y)R(y, g(x))$

5.4.2. Reglas básicas de inferencia

- **En nuestro cálculo evitaremos, en lo posible, el uso de fórmulas abiertas.**

- **Cuando se elimine un cuantificador, sustituiremos las apariciones de la variable ligada por el cuantificador por** *parámetros* **o** *términos***:**

- **Un parámetro es una variable libre, no suscetible de ser cuantificada (las denotaremos por $a, b, c, \ldots$).**

- **Estos términos no contendrán ninguna variable susceptible de ser ligada (usaremos, genericamente, el símbolos t para representarlos).**

Observación 5.4.4 ***Para designar los parámetros se emplean los mismos símbolos que para las constantes porque en ocasiones estas variables hacen referencia a un individuo concreto del universo de discurso, pero no deben confundirse con constantes.***

Reglas básicas del cuantificador universal

Eliminación del generalizador (EG).
$$\frac{(\bigwedge x)\mathcal{A}}{\mathcal{A}\{x/t\}}$$ **"t" es un término que no contiene variables subceptibles de ser ligadas**

Introducción del generalizador (IG).
$$\frac{\mathcal{A}\{x/a\}}{(\bigwedge x)\mathcal{A}}$$ **Condición: "a" no debe aparecer en ningún supuesto previo no cancelado.**

Reglas básicas del particularizador

Eliminación del particularizador (EP).
$$\frac{\begin{array}{ll}(\bigvee x)\mathcal{A} & \\ \lceil & \mathcal{A}\{x/a\} \\ & \Downarrow \ldots \\ \lfloor & \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{B}}$$ **Condición: "a" no debe aparecer en $(\bigvee x)\mathcal{A}$, ni en $\mathcal{B}$, ni en ningún supuesto previo no cancelado.**

Introducción del particularizador (IP).
$$\frac{\mathcal{A}\{x/t\}}{(\bigvee x)\mathcal{A}}$$ **"t" es un término que no contiene variables subceptibles de ser ligadas**

5.4.3. Reglas derivadas de inferencia.

- **Ver [3] para una lista completa de las mismas.**

5.4.4. Consejos para la resolución de argumentos.

Ademàs de los consejos para la resolución de argumentos introducidos en el capítulo 3, aquí seguiremos los siguientes:

1. **Si es posible, comenzar eliminando los cuantificadores de las fbf's cerradas para obtener fbf's de la lógica de enunciados.**
2. **aplicar las técnicas de la lógica de enunciados a las fbf's resultantes y obtener una fórmula derivada próxima a la conclusión.**
3. **Restituir los cuantificadores eliminados, empleando las reglas de inferencia de introducción de dichos cuantificadores, para obtener la conclusión.**

Ejemplo 26
$\{(\bigwedge x)(Qx \to Rx), (\bigwedge x)(Px \to Qx)\} \vdash (\bigwedge x)(Px \to Rx)$

–	(1)	$(\bigwedge x)(Qx \to Rx)$	
–	(2)	$(\bigwedge x)(Px \to Qx)$	
	(3)	$Qa \to Ra$	***EG 1***
	(4)	$Pa \to Qa$	***EG 2***
	(5)	$Pa \to Ra$	***SH 3,4***
	(6)	$(\bigwedge x)(Px \to Rx)$	***IG 5***

Bibliografía

[1] Chin-Liang Chang and R. Char-Tung Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.* Academic Press, Inc., 1973.

[2] A. Deaño. *Introducción a la lógica formal.* Alianza Universidad, Madrid, 1996.

[3] M. Garrido. *Lógica simbólica.* Tecnos, Madrid, 1997.

[4] A. G. Hamilton. *Lógica para Matemáticos.* Paraninfo, 1981.

[5] J.W. Lloyd. *Foundations of Logic Programming.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. Second edition.

[6] B. Mates. *Lógica Matemática Elemental.* Tecnos, Madrid, 1974.