TEMA 4.

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

4.1 Introducción.

4.2 Expresión de $E'(x)$ mediante diferencias divididas.

4.3 Fórmulas usuales de derivación numérica.

4.4 Derivadas de orden superior.

4.5 Integración numérica.

- 4.5.1 Fórmula del trapecio.
- 4.5.2 Fórmula de Simpson.
- 4.5.3 Fórmula compuesta del trapecio
- 4.5.4 Fórmula compuesta de Simpson.

DIFERENCIA DIVIDIDA PARA PUNTOS NO NECESARIAMENTE DISTINTOS.

Definición: Sea $f \in C^n([a,b])$ y $x_0, x_1, \ldots x_n \in [a,b]$

a) Si $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots\ldots \leq x_n$, definimos

$$f[x_0,..,x_n] = \begin{cases} \dfrac{f[x_0,..,x_{n-1}] - f[x_1,..,x_n]}{x_0 - x_n} & x_0 \neq x_n \\ \dfrac{f^{n)}(x_0)}{n!} & x_0 = x_n \end{cases}$$

b) Si $x_0,..,x_n$ no están ordenados, los ordenamos y procedemos como en el apartado a)

Teorema: Supongamos que $f \in C^{n+2}([a,b])$, podemos definir $g(x) = f[x_0, x_1, .., x_n, x]$. Entonces g es derivable y $g'(x) = f[x_0, x_1, .., x_n, x, x]$

EXPRESIÓN DE E´(X) MEDIANTE DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

Recordemos que:

$$E(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) =$$

$$= f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

$$\boxed{E'(x)} = f[x_0, .., x_n, x, x](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x -$$

$$+ f[x_0, .., x_n, x]((x - x_1)..(x - x_n) + (x - x_0)(x -$$

$$..(x - x_n) + \ldots + (x - x_0) \ldots \ldots (x - x_n)) \quad =$$

$$= f[x_0, .., x_n, x, x] \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) +$$

$$+ f[x_0, .., x_n, x] \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} (x - x_j) =$$

$$= \frac{f^{n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) + \frac{f^{n+1}(\xi_2)}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} (x$$

Luego la expresión del error paracualquier punto c será:

$$E'(c) = \frac{f^{n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!} \prod_{k=0}^{n} (c - x_k) +$$

$$+ \frac{f^{n+1}(\xi_2)}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \neq k} (c - x_j)$$

Habitualmente se toma $c = x_k,$quedando

$$E'(c) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (c - x_j)$$

El error para la derivada segunda sería:

$$f''(c) = P''(c) + E''(c)$$

$$E''(c) = \frac{f^{n+3)}(\xi_1)}{(n+3)!} \prod (c) + 2\frac{f^{n+2)}(\xi_2)}{(n+2)!} \prod{}'$$

$$+\frac{f^{n+1)}(\xi_3)}{(n+1)!} \prod{}''(c).$$

donde $\prod(c) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$

DERIVACIÓN NUMÉRICA.

DERIVADAS DE ORDEN UNO.

A) Fórmulas de tres puntos: $x_0 < x_1 < x_2$

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + \frac{h^2 f^{3)}(\theta)}{3}$$

$$f'(x_1) = \frac{-f_0 + f_2}{2h} - \frac{h^2 f^{3)}(\theta)}{6}$$

$$f'(x_2) = \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h} + \frac{h^2 f^{3)}(\theta)}{3}$$

B) Fórmulas de cinco puntos: $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

$$f'(x_0) = \frac{-25f_0 + 48f_1 - 36f_2 + 16f_3 - 3f_4}{12h} + \frac{h^4 f^{v)}(\theta)}{5}$$

$$f'(x_1) = \frac{-3f_0 - 10f_1 + 18f_2 - 6f_3 + f_4}{12h} - \frac{h^4 f^{v)}(\theta)}{20}$$

$$f'(x_2) = \frac{f_0 - 8f_1 + 8f_3 - f_4}{12h} + \frac{h^4 f^{v)}(\theta)}{30}$$

$$f'(x_3) = \frac{-f_0 + 6f_1 - 18f_2 + 10f_3 + 3f_4}{12h} - \frac{h^4 f^{v)}(\theta)}{20}$$

$$f'(x_4) = \frac{3f_0 - 16f_1 + 36f_2 - 48f_3 + 25f_4}{12h} + \frac{h^4 f^{v)}(\theta)}{5}$$

DERIVADAS DE ORDEN DOS.

A) Fórmula de tres puntos: $x_0 < x_1 < x_2$

$$f''(x_1) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} - \frac{h^2 f^{4)}(\theta)}{12}$$

B) Fórmula de cinco puntos: $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

$$f''(x_2) = \frac{-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4}{12h^2} + \frac{h^4 f^{vi)}(\theta)}{90}$$