METODO DE LA BISECCIÓN

Si $f:[a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es continua con $f(a)f(b) < 0,$ el procedimiento de la bisección genera una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente siendo $s_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ y tal que si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ se cumple que $f(s) = 0$ y

$$|\ s_n - s\ | \leq \frac{b-a}{2^n}$$

ALGORITMO DE LA BISECCION

Cálculo de una solución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$, siendo f continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$.

ENTRADA: $a, b, f; N$ (número máximo de iteraciones)

SALIDA:Solución aproximada s

1.Tomar $i = 1$

2. Mientras que $i \leq N$ hacer

   2.1. $s = (a+b)/2$

   2.2. Si $f(s) = 0$ entonces s=solución exacta.

   2.3. Si $f(a)f(s) < 0$ entonces $b = s$

   Si $f(a)f(s) > 0$ entonces $a = s$

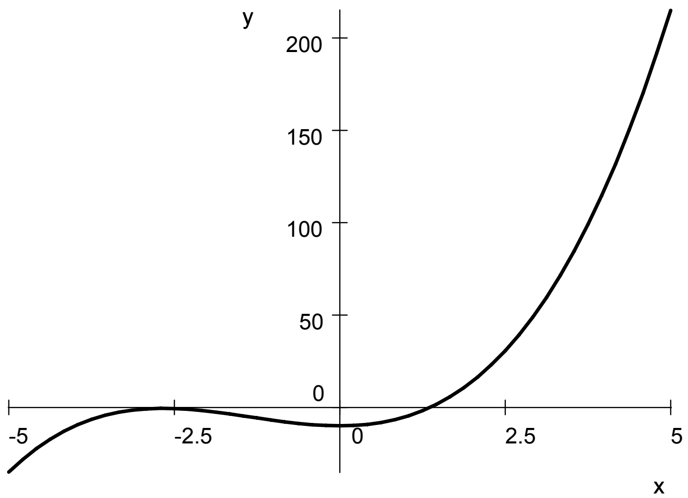
   2.4. $i = i + 1$

3. Salida s: "solución aproximada"

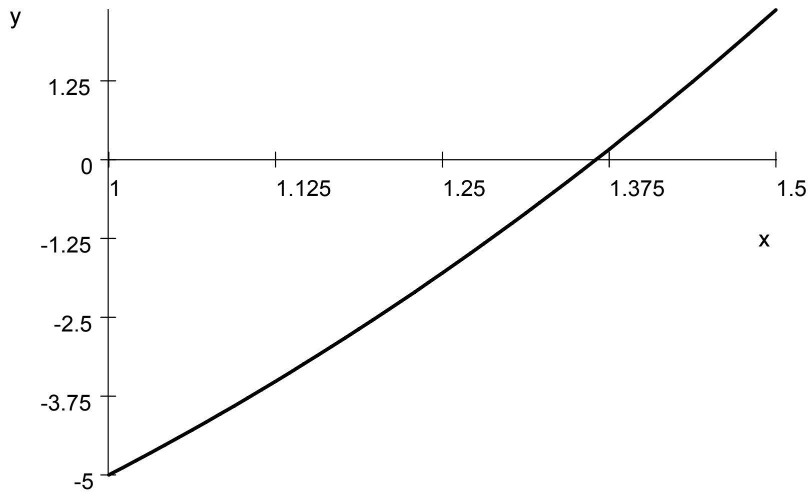
4.FIN

EJEMPLO 1

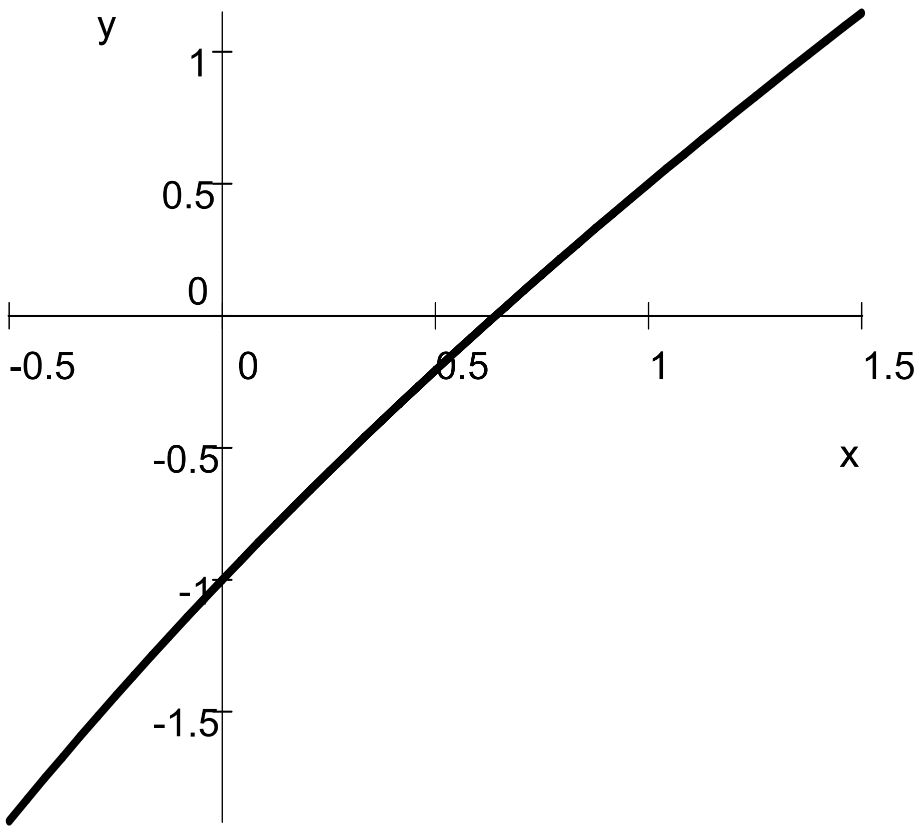
La funcion $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene dos raíces como muestra la siguiente figura.



a_n	b_n	s_{n+1}	$f(s_{n+1})$
1	2	1.5	2.375
1	1.5	1.25	-1.79687
1.25	1.5	1.375	0.16210
1.25	1.375	1.3125	-0.84838
1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
1.34375	1.375	1.35937	-0.09640
1.35937	1.375	1.36718	0.03235
1.35937	1.36718	1.36328	-0.03214
1.36328	1.36718	1.36523	$7.20247 10^{-5}$
1.36328	1.36523	1.36425	-0.01604
1.36425	1.36523	1.36474	-0.00798
1.36474	1.36523	1.36499	-0.00395
1.36499	1.36523	1.36511	-0.00194



Ejemplo: Mediante el algoritmo de la bisección y con un error menor que 10^{-5}, calcular una solución aproximada de $f(x) = x - 2^{-x}$



n	a_n	b_n	s_n	$f(s_n)$
1	0	1	0.5	–0.20711
2	0.5	1	0.75	0.15540
–	–	–	–	–
17	0.64117	0.64118	<u>0.64118</u>	

ALGORITMO DEL PUNTO FIJO

Cálculo de una solución aproximada de la ecuación

$f(x) - x = 0$, siendo f continua en $[a, b]$ con $f[a, b] \subset [a, b]$, f derivable en (a, b) con $|f'(x)| \leq k < 1$

ENTRADA: $s_0, f; N$ (número máximo de iteraciones)

SALIDA:Solución aproximada s

1. $s = f(s_0)$
2. Desde $i = 1$ hasta N hacer
   2.1. $s = f(s)$
   2.2. $i = i + 1$
3. Salida s: "solución aproximada"
4. FIN

EL METODO DEL PUNTO FIJO

Definición: Diremos que una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tiene a $x\in[a,b]$ como punto fijo si $f(x)=x$

Teorema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua con $f([a,b])\ \subset[a,b]$. Entonces f tiene un punto fijo,si además, f es derivable y $f'(x)\neq 1\ \forall x\in(a,b)$ el punto fijo es único.

Teorema del Valor Medio: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en $(a,b)\Rightarrow\exists\ c\in(a,b)$ tal que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Teorema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b) con:

i) $f([a,b])\ \subset[a,b]$.

ii) $|\ f'(x)\ |\leq k<1 \qquad \forall x\in(a,b)$

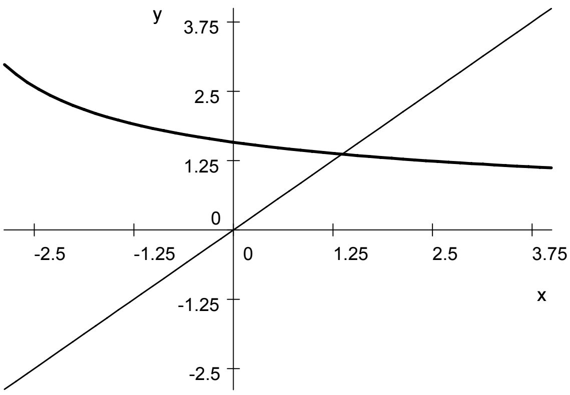
Entonces si s_0 es cualquier número $\in[a,b]$, la sucesión definida por $s_1=f(s_0),......,s_n=f(s_{n-1})\ \forall n\in\mathbb{N}$, converge al único punto fijo $s\in[a,b]$.

Además las cotas para el error son:

1. $| \ s_n - s \ | \leq K^n máx\{s_0 - a, b - s_0\} \leq K^n(b -$
2. $| \ s_n - s \ | \leq \dfrac{K^n}{1 - K} \ | \ s_0 - s_1 \ |$

EJEMPLO 2

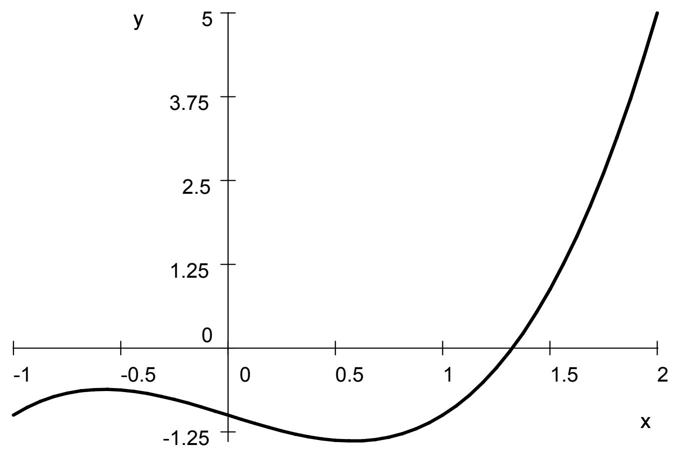
Calcular aproximadamente el punto fijo de la función $f(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ con 10 iteraciones, y calcular el error cometido



n	$s_{n+1} = f(s_n)$
0	1.5
1	1.348399724
2	1.367376371
3	1.364957015
4	1.365264748
5	1.365225594
6	1.365230575
7	1.365229941
8	1.365230022
9	1.365230012
10	1.365230013

EJEMPLO 3

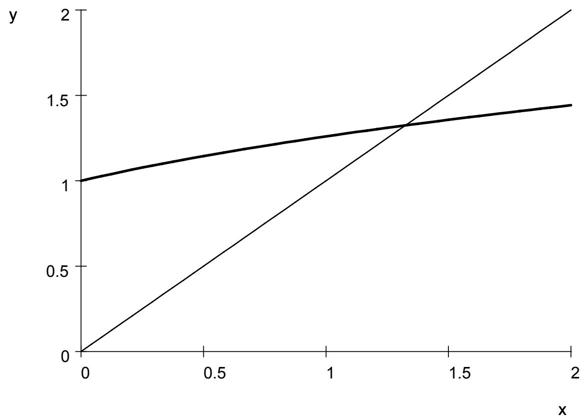
Aplicando el método de iteración de punto fijo resolver la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ con un error menor que 10^{-5}



$y=x^3-x-1$

$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+1}.$ La función que iteramos es

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x+1}}$$



n	$S_{n+1} = f(s_n)$
0	1.5
1	1.357208808
2	1.330860958
3	1.325883774
4	1.324939363
5	1.324760011
6	1.324725945
7	1.324719474
8	1.324718245

EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.

Teorema: Sea $f \in C^2([a,b])$. Si $s \in [a,b]$ es tal que $f(s) = 0$ y $f'(s) \neq 0$. Entonces $\exists$ $\delta > 0$ tal que $\forall\ s_0 \in [s-\delta, s+\delta]$ la sucesión de Newton -Raphson , $s_{n+1} = s_n - \dfrac{f(s_n)}{f'(s_n)}$, está bien definida y converge a s.

Nota: La sucesión de Newton-Raphson no siempre tiene que converger. Puede que incluso no esté definida (que sucederá si para algún n, $s_n \notin [a,b]$ ó $f'(s_n) = 0$).

Teorema: Sea $[a,b]$ y $f \in C^2[a,b]$, verificando:

$i)\ f(a)f(b) < 0$

$ii)\ \forall\ x \in [a,b]\ f'(x) \neq 0$

$iii)\ \forall\ x \in [a,b]\ f''(x) \geq 0$ ó $\forall\ x \in [a,b]$ $f''(x) \leq 0$

Entonces f tiene una única raíz s en $[a,b]$ y si $s_0 \in [a,b]$ verifica que $f(s_0)f''(s_0) > 0$, la sucesión de Newton converge a s.

EL ERROR EN EL METODO DE NEWTON

Definición:Si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, se dice que (s_n) tiene orden de convergencia $\alpha > 0$ si:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ s_{n+1} - s\ |}{|\ s_n - s\ |^{\alpha}} = \lambda \neq 0$$

Si $\alpha = 1$, la convegencia es lineal.

Si $\alpha = 2$, la convegencia es cuadrática.

Teorema: la sucesión de Newton-Raphson tiene orden de convergencia cuadrática.

Teorema: Sea $f \in C^2[a,b]$, $s \in [a,b]$ una raíz de f tal que $f'(s) \neq 0$ y $f''(s) \neq 0$. Supongamos que existen m y M tales que $\forall x \in [a,b]\ |\ f'(x)\ | \geq m$ y $|\ f''(x)\ | \leq M$. Entonces si (s_n) es la sucesión de Newton-Raphson y converge a s se tiene

$$|\ s_{n+1} - s\ | \leq |\ s_{n+1} - s_n\ |^2\ \frac{M}{m}$$

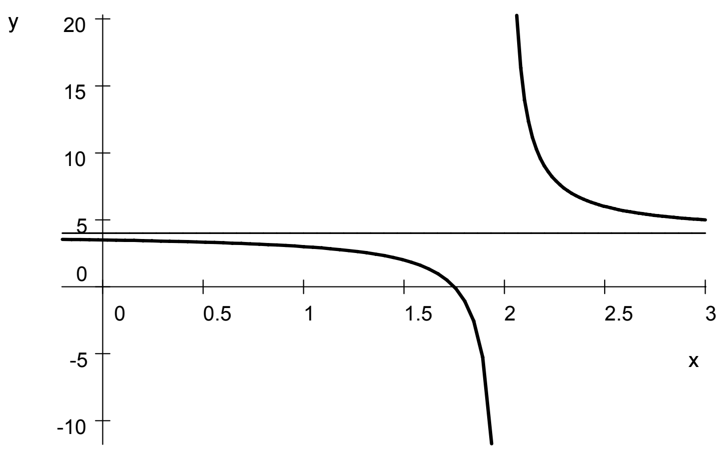
Nota:Otros procedimientos de paro que

se van a poder aplicar a cualquier técnica iterativa es que dado un cierto $\epsilon > 0$ pararemos cuando

$$| \; s_{n+1} - s \; | < \epsilon$$

EJEMPLO 4

Aplicando el método de Newton-Raphson resolver la ecuación
$\frac{4x-7}{x-2} = 0$

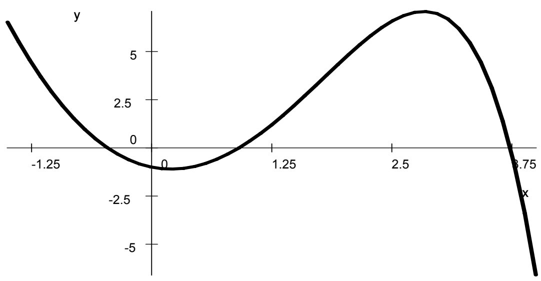


y=(4x-7)/(x-2)

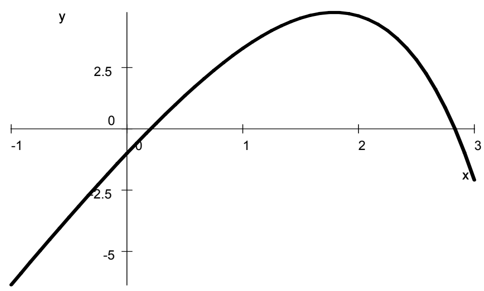
n	s_n	s_n	s_n	s_n
0	1	1.5	1.725	2.1
1	4	2	1.7525	2.24
2	22	ERROR	1.75	2.7104
3	1642		1.75	5.4344
4	$+\infty$			56.1988

Ejemplo 6:

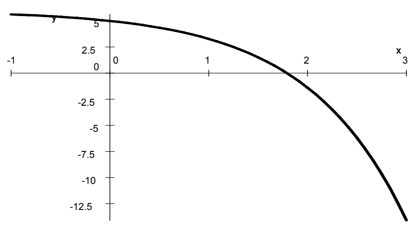
Usar el método de Newton para aproximar la solución de la ecuación $3x^2 - \exp(x) = 0,$ con una precisión de 10^{-5}.



f(x)=3x$^2 - \exp x$



f´(x)=6x-expx



f´´(x)=6-$\exp x$

Sabiendo que las soluciones de la ecuación $3x^2 - \exp x = 0$ se encuentran en los intervalos $[-1,0],[1/2,1],[3,4]$ y que los términos iniciales de la sucesión de newton son respectivamente $s_0 = -1, s_0 = 1, s_0 = 4$. Calcular las soluciones aproximadas con un error menor que 10^{-5}.

n	**s**$_n$	**s**$_n$	**s**$_n$
0	**–1**	**1**	**4**
1	**–0.5866566**	**0.9141553**	**3.784301**
2	**–0.4698019**	**0.9100177**	**3.735379**
3	**–0.4590539**	<u>**0.9100076**</u>	**3.733084**
4	**–0.4589623**		<u>**3.733079**</u>
5	<u>**–0.4589623**</u>		

Nota: Hemos tomado como procedimiento de paro cuando

$| \; s_n - s_{n-1} \; | < 10^{-5}$

EL METODO DE LA SECANTE

Teorema: Sea $f \in C^2([a,b])$. Si $s \in [a,b]$ es tal que $f(s) = 0$ y $f'(s) \neq 0$. Entonces $\exists$ $\delta > 0$ tal que $\forall\ s_0\ s_1 \in [s-\delta, s+\delta]$ la sucesión del método de la secante definida por

$$s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)(s_n - s_{n-1})}{f(s_n) - f(s_{n-1})},$$ está bien definida y converge a s.

ALGORITMO DE LA SECANTE

Cálculo de una solución aproximada de la ecuación $f(x) = 0$.

ENTRADA: $s_0, s_1, f; \varepsilon$ (errror máximo tolerado)

SALIDA:Solución aproximada s

1. $s_2 = s_1 - f(s_1)(s_1 - s_0)/(f(s_1) - f(s_0))$
2. Mientras que $|s_2 - s_1| \geq \varepsilon$ hacer

   2.1 $s_1 = s_2 - f(s_2)(s_2 - s_1)/(f(s_2) - f(s_1))$

   2.2 $s_2 = s_1 - f(s_1)(s_1 - s_2)/(f(s_1) - f(s_2))$

4. SALIDA s_2: solución aproximada

5.FIN

ECUACIONES POLINÓMICAS.

Definición: Un polinomio de grado n es de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

1. Si $P(a)P(b) < 0$, en el intervalo (a, b) existe un nº impar de raices.

2. Si $P(a)P(b) > 0$, en el intervalo (a, b) no hay raices del polinomio $P(x)$ ó existen un nº par .

Definición: Supongamos un conjunto finito ordenado de números reales distintos de cero:

$$c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_n \qquad n \geq 2$$

Diremos que existe un cambio de signo para un par de dos elementos sucesivos c_k, c_{k+1} si los elementos tienen signos opuestos, es decir, si

$$c_k c_{k+1} < 0$$

Definición: Se conoce como sucesión de Sturn a la formada por los polinomios

$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots\ldots P_m(x)$ donde

$P_0(x) = P(x)$

$P_1(x) = P'(x)$

$P_2(x)$ es el resto con signo opuesto que queda de la división de $\frac{P_0(x)}{P_1(x)}$

$P_3(x)$ es el resto con signo opuesto que queda de la división de $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ y así sucesivamente

Definición (nº de cambios de signo): Dado $x \in \mathbb{R}$ y $\{P_0(x), P_1(x), \ldots\ldots P_m(x)\}$ la sucesión de Sturn del polinomio $P(x)$. Denotamos por $v_p(x)$ el número de cambios de signo de la sucesión $\{P_0(x), P_1(x), \ldots\ldots P_m(x)\}$.

Teorema de Sturn: Si $a < b$ son números reales que no son raíces de $P(x)$ entonces $v_p(a) - v_p(b) =$nº de raíces reales de $P(x)$ en el intervalo (a, b).

Definición (Acotación de las raíces): Sea la ecuación polinómica

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0.$

Si $B = máx\{|\ \dfrac{a_i}{a_n}\ |\quad i = 0,\ldots\ldots,n-1\}$, las raíces de la ecuación van a estar entre

$$|\ z\ | \leq 1 + B, \text{ es decir,}$$

$$-1 - B \leq z \leq 1 + B$$