Para resolver un sistema lineal estan permitidas tres operaciones en las ecuaciones.

1. La ecuación E_i puede multiplicarse por cualquier costante λ diferente de cero y se puede usar la ecuación resultante en lugar de E_i . Se denotará por $(\lambda E_i) \rightarrow E_i$.

2. La ecuación E_j puede multiplicarse por cualquier costante λ , sumarla a la E_i y usar la ecuación resultante en lugar de E_i . Se denotará por $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow E_i$.

3. Las ecuaciones E_i y E_j se pueden

intecambiar.Esta operación se denotará por $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

Por la secuencia de operaciones anteriores, un sistema lineal se puede transformar en otro más fácil de resolver y que tiene el mismo conjunto de soluciones.

ALGORITMO DE GAUSS PARA LA RESOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL

ENTRADA: Número de incógnitas y de ecuaciones n ; matriz ampliada $A=(a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n+1$

SALIDA: Solución única $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ ó mensaje de que no tiene solución única.

Paso1: Para $i = 1, \ldots\ldots, n-1$ seguir los

pasos 2-4. (Proceso de Eliminación).

Paso 2: (Búsqueda del pivote).

Encontrar $p \geq i$ entero mínimo tal que $a_{pi} \neq 0$.

Si p no puede encontrarse,entonces

SALIDA: “No hay solución única”.
FIN.

Paso 3: (Cambiar la fila p por la i).

Si $p > i$. Entonces $E_i \rightarrow \quad E_p$

Paso 4: (Hacer ceros debajo del a_{ii}).

Para $j = i + 1$ hasta N hacer pasos 5 y 6

Paso 5:(Calculamos el multiplicador)

Tomar $m_{ji} = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

Paso 6: Hacer ($E_j - m_{ji}E_i) \rightarrow \ (E_j)$

Paso 7: Si $a_{nn} = 0,$ entonces

SALIDA “No hay solución única”. FIN

Paso 8: (Cálculo de la solución única, haciendo sustitución hacia atrás).

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Paso 9: Para $i = n - 1, \ldots\ldots, 1$ tomar

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)/a_{ii}$$

Paso 10: SALIDA: $(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$. FIN

PROPIEDADES DE LAS MATRICES.

a) Se dice que dos matrices A y B son iguales si son del mismo tamaño ,por ejemplo $m \times n$ y si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada $i = 1,2,\ldots..m$ y $j = 1,2,\ldots n$.

b) Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces la suma de A y B, que denotamos por $A + B$, es la matriz $m \times n$ cuyos elementos son $a_{ij} + b_{ij}$, para cada $i = 1,2,\ldots..m$ y $j = 1,2,\ldots n$.

c)Si A es una matriz $m \times n$ y λ un número real , entonces el producto escalar , denotado por λA, es una matriz de $m \times n$ cuyos elementos son λa_{ij} para cada $i = 1,2,\ldots..m$ y $j = 1,2,\ldots n$.

d)Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$. El producto matricial de A y B , denotado por AB, es una matriz $m \times p$, que llamaremos C y cuyos elementos c_{ij} están dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

ALGORITMO DE GAUSS PARA EL CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ.

ENTRADA: n, $a_{i,j}$, matriz A.

SALIDA: $B = A^{-1}$, o mensaje de que A no tiene inversa.

Paso1: (Lectura de los términos independientes). Para $i = 1$ hasta n y para $j = n + 1$ hasta $2n$ hacer

$$a_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 \text{ si } i{=}j{-}n \\ 0 \text{ si } i{\neq}j{-}n \end{Bmatrix}$$

Paso2: (Proceso de eliminación) Para $i = 1$ hasta n hacer los pasos 3 - 5.

Paso3:(Búsqueda del pivote). Encontrar el mínimo $p \geq i$ tal que $a_{pi} \neq 0$. Si p no puede encontrarse SALIDA."No hay matriz inversa".FIN.

Paso 4:(Cambiar la fila p por la i): Si$p > i$ hacer $E_i \leftrightarrow E_p$.

Paso 5: (hacer ceros debajo y encima de a$_{ii}$). Para $j = 1$ hasta n y $j \neq i$ hacer los pasos 6 y 7.

Paso 6: $m_{ji} = \dfrac{a_{ji}}{aii}$

Paso7: $E_j \leftrightarrow E_i - m_{ji}E_i$

Paso 8: (Cálculo final de la inversa): Para $i = 1$ hasta n hacer $E_i/a_{ii} \to E_i$.

Paso 9: SALIDA: La inversa. FIN.

DEFINICION:

a) Si $A = (a)$ es una matriz de 1×1, entonces $\det A = a$.

b) El menor M_{ij}, es el determinante de la submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de una matriz $n \times n$ de A obtenido al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna .

c) El cofactor A_{ij} asociado con M_{ij} se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

d)El determinante de una matriz A $n \times n$ donde $n > 1$ esta dado bien por:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$.

ó

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ para cualquier $j = 1, 2, \ldots, n$.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

Sea A una matriz $n \times n$.

a) Si cualquier fila o columna de A tiene sólo componentes cero, entonces $\det A = 0$

b) Si B se obtiene de A por medio de la operación $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$, con $i \neq j$, entonces $\det B = -\det A$

c)Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det A = 0$.

d)Si B se obtiene de A por medio de la operación $(\lambda E_i) \mapsto (E_j)$, entonces el $\det B = \lambda \det A$

e)Si B se obtiene de A por medio de la operación $(E_i + \lambda Ej) \mapsto (E_i)$, con $i \neq j$ entonces el $\det B = \det A$.

f) Si B es una matriz $n \times n$ entonces $\det AB = \det A \times \det B$.

TEOREMA: Para una matriz A $n \times n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) la ecuación $Ax = 0$ tiene una única solución $x = 0$.

b) El sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cualquier vector columna b n-dimensional.

c) La matriz A es no-singular , es decir, A^{-1}existe.

d) El algoritmo del método de Gauss se puede aplicar al sistema lineal $Ax = b$ para cualquier vector columna b n-dimensional.

ALGORITMO DE FACTORIZACION DE UNA MATRIZ.(Método de Doolittle).

ENTRADA: n, a_{ij}, para $i,j = 1,\ldots,n$.

SALIDA: La matriz $L = (l_{ij})$ (con $l_{ii} = 1$) y la matriz $U = (u_{ij})$ o mensaje de que la factorización no se puede realizar.

Paso1: (Cálculo de la 1ª fila de U y la primera columna de L)

1.1 Hacer $l_{11} = 1$, $u_{11} = a_{11}$. Si $u_{11} = 0$ entonces SALIDA "Factorización imposible".

1.2. Para $j = 2,\ldots,n$ hacer $u_{1j} = a_{1,j}$, $l_{j1} = a_{j,1}/u_{11.}$

Paso 2. (Cálculo de las filas $2,\ldots,n-1$ de U y las columnas $2,\ldots,n-1$ de L).

2.1. Para $i = 2$ hasta $n-1$ hacer

2.2. $l_{ii} = 1, u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}a_{ki}$.. Si $u_{ii} = 0$ entonces SALIDA "Factorización imposible".

2.3 Para $j = i + 1$ hasta n hacer.

2.4 $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$

$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}) / u_{ii}.$

Paso3.(Cálculo de la fila n de L y la columna n de U).

3.1. Hacer $l_{nn} = 1, u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}.$

Paso 4. SALIDA $L = (l_{ij}), U = (u_{ij}).$ FIN

MATRICES SIMÉTRICAS DEFINIDAS POSITIVAS.

DEFINICION: La traspuesta de una matriz A $m \times n$, denotada por A^t, es una matriz $n \times m$, cuyos elementos son $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$. Una matriz cuya traspuesta es ella misma se llama simétrica.

DEFINICION: Una matriz simétrica A $n \times n$ se llama definida positiva si $x^t A x > 0$, para todo vector columna n-dimensional $x \neq 0$.

TEOREMA. Sea A una matriz simétrica, entonces son equivalentes:

i) A es definida positiva.

ii) $\forall\ k = 1, \ldots,$el menor principal que viene dado por $D_k = |a_{ij}|_{i,j=1,2 \ldots k}$ es $D_k > 0$.

TEOREMA. Si A es una matriz $n \times n$ definida positiva, entonces A es no-singular . Además , la eliminación Gaussiana se puede aplicar a cualquier sistema lineal de la forma $Ax = b$ para obtener su solución única sin intercambios de filas ni de columnas .

CONCLUSION: Toda matriz definida positiva se puede factorizar de la forma $A = LU$.

TEOREMA: Sea A una matriz simétrica definida positiva, entonces $A = LL^t$, para una única L matriz triangular inferior.

ALGORITMO DE CHOLESKI. Para factorizar una matriz A simétrica, definida positiva de la forma A=LL$^{t.}$

ENTRADA: n, $A = (a_{i,j})$, para

$i,j = 1,\ldots,n.$ con$a_{ij} = a_{ji}$

SALIDA: La matriz L =($l_{i,j}$) o mensaje de que A no es definida positiva.

Paso1: (Cálculo de la 1ª columna de L)

1.1 Si $a_{ii} \leq 0$ entonces SALIDA ”A no es definida positiva”

1.2. $l_{ii} = \sqrt{a_{ii}}$

1.3. Para $j = 2,..,n$ hacer $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$

Paso 2. (Cálculo de las las columnas $2,\ldots,n-1$).

2.1. Para $i = 2$ hasta $n-1$ hacer

2.2. $p = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2$

2.3 Si $p \leq 0$ entonces SALIDA ”A no es definida positiva”. FIN.

2.4 $l_{ii} = \sqrt{p}$

2.5 Para $j = i + 1$ hasta n, hacer

$l_{ij} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}) / l_{ii}$

Paso3.(Cálculo de la fila n de L)

3.1. $p = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2$

3.2. Si $p \leq 0$ entonces SALIDA ”A no es definida positiva”.FIN.

3.3.$l_{nn} = \sqrt{p}$

Paso 4. SALIDA $L = (l_{ij})$. FIN