FÓRMULA DE LAGRANGE PARA EL POLINOMIO INTERPOLADOR.

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ puntos distintos del dominio de definición. Supongamos que conocemos $f(x_0)$,$f(x_1)$,......,$f(x_n)$.

Por comodidad escribiremos $f(x_k) = f_k$.

Para $k = 0, 1, \ldots n$ construimos un polinomio $L_k(x)$ de grado n tal que

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

Entonces el polinomio interpolador va a venir dado por

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \ldots\ldots\ldots + f_n L_n(x)$$

FÓRMULA DE NEWTON.

Sea $f, x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n,$ y $f_0, f_1, \ldots\ldots, f_n$ sus imágenes.

Sea $P_k$el polinomio interpolador en $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_k$.

Sea P_{k-1}el polinomio interpolador en $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Llamamos $Q_k(x) = P_k(x) - P_{k-1}(x)$

$Q_k(x)$ es un polinomio de grado $\leq k$ que se anula en $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.Luego:

$$Q_k(x) = A_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j),$$ siendo

$$A_k(x) = \frac{P_k(x) - P_{k-1}(x)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)}$$

En particular si hacemos $x = x_k$ obtenemos

$$A_k(x_k) = \frac{P_k(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)} = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}$$

Con los datos anteriores obtenemos la siguiente expresión para el polinomio interpolador:

$$P_n(x) = Q_n(x) + P_{n-1}(x) = Q_n(x) + Q_{n-1}(x) +$$

$$= Q_n(x) + Q_{n-1}(x) + \ldots\ldots\ldots + Q_0(x) =$$

$$= A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) + A_{n-1}(x - x_0)\ldots(x - x$$

$$+ \ldots\ldots + A_1(x - x_0) + A_0.$$

Donde $A_0 = f_0$

Llamaremos a A_k diferencia dividida de f en $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_k$ y lo escribiremos como $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$.

$$A_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f_k - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}.$$

Con lo cual la expresión del polinomio interpolador queda de la siguiente forma:

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) +$$

$$+ \ldots\ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

A esta fórmula para el polinomio interpolador la llamaremos fórmula de Newton.

NOTA:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}$$

ESTIMACION DEL ERROR DE INTERPOLACIÓN.

Si P_n es el polinomio de interpolación de la función f en $x_0, x_1, \dots, x_n,$ el error cometido al aproximar f por P_n es $E(x) = f(x) - P_n(x)$.

Teorema: El error cometido es:

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x$$

donde $f[x_0, \dots, x_k] = \dfrac{f(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j)}.$

Teorema: Supongamos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable k veces en $[a,b]$, que $x_0, x_1, \dots, x_k$ son puntos distintos del intervalo. Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f^{k)}(\xi)}{k!}$$

Consecuencia: Haciendo $k = n + 1$ y $x_{n+1} = x$ el error de interpolación es, si f es $n + 1$ veces derivable y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Luego una cota para el error sería:

$$| \; E(x) \; | = \left| \; \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \; \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} | \; x - x_j \; |$$

donde $M \geq \sup\{ | \; f^{n+1)}(t) \; | \; \mid \; t \in [a, b] \}$