AXIOMAS DE CUERPO.

En $\mathbb{R}$ admitimos la existencia de dos operaciones internas la suma y el producto, con estas operaciones se van a verificar las siguientes propiedades:

Respecto a la suma:

1. Conmutativa: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Neutro: $\exists\ 0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.
4. Opuesto: Dado $a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.

Respecto al producto:

5. Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
6. Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
7. Neutro: $\exists\ 1 \in \mathbb{R}$, tal que $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.
8. Existencia de inverso: dado $a \in \mathbb{R}$, con

$a \neq 0,\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \bullet a^{-1} = 1.$

9. Propiedad distributiva:

$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS DE CUERPO.

Proposición: Si a, b, c son números reales, entonces:

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$
3. Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$

AXIOMAS DE ORDEN.

Vamos a definir una relación de orden en $\mathbb{R}$, a partir de los dos siguientes axiomas :

En $\mathbb{R}$ existe un subconjunto , llamado de los reales positivos, $\mathbb{R}^+$, que verifica:

Axioma1: Para cada $a \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

$i)\ a = 0$

$ii)\ a \in \mathbb{R}^+$

$iii)\ -a \in \mathbb{R}^+$

Axioma 2: Si a y $b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $a \bullet b \in \mathbb{R}^+$

CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS DE ORDEN.

Teorema: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se verifica:

1. Si $a > b$ y $b > c \Rightarrow a > c$.
2. Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.
3. Si $a > b$ y $c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac > bc$.
4. Si $a > b$ y $c < 0 \Rightarrow ac < bc$.
5. Si $a > b$ y $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.
6. Si $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.
7. Si $ab > 0 \Rightarrow$

    $i)$ $a > 0$ y $b > 0$ o bien,

    $ii)$ $a < 0$ y $b < 0$.

AXIOMA DEL SUPREMO. Definiciones.

Definición: Sea S un conjunto no vacío de números reales, supongamos que existe un b tal que $x \leq b, \ \forall x \in S,$ entonces decimos que S está acotado superiormente y que b es una cota superior de S.

Definición: Si b es una cota superior y pertenece al conjunto, diremos que b es el máximo de S.

Definición: Diremos que b es el supremo del conjunto S cuando:

$i)$ b es cota superior.

$ii)$ b es la menor de las cotas superiores.

Definición: Sea S un conjunto no vacío de números reales, supongamos que existe un b tal que $b \leq x, \ \forall x \in S,$ entonces decimos que S está acotado inferiormente y que b es una cota inferior de S.

Definición: Si b es una cota inferior y pertenece al conjunto, diremos que b es el mínimo de S.

Definición: Diremos que b es el ínfimo del conjunto S cuando:

$i)$ b es cota inferior.

$ii)$ b es la mayor de las cotas inferiores.

OBSERVACIONES:

1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, o bien no tiene ninguna cota superior, o bien tiene infinitas.

2. Si existe el máximo de un conjunto, éste es el supremo. Lo mismo con el mínimo.

3. El máximo ó el mínimo de un conjunto acotado no siempre existen.

AXIOMA DEL SUPREMO. CONSECUENCIAS.

Axioma del supremo: Todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente, tiene supremo, es decir, $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup S$.

Observación: Lo mismo para el ínfimo.

CONSECUENCIAS:

1. Propiedad Arquimediana: Si $x \in \mathbb{R}$, entonces existe un $n_x \in \mathbb{N}$ / $x < n_x$

2. Densidad de los racionales en los reales.

Teorema: Si x e y son dos númeos reales con $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$.

Es mas existen infinitos racionales.

3. Densidad de los irracionales en los reales.

Teorema: Si x e y son dos númeos reales con $x < y$, entonces existe un número irracional z tal que $x < z < y$.

VALOR ABSOLUTO.

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES:

Para todo a y $b \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. $|a| \geq 0$, y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$
5. Si $a > 0$, se cumple :

   $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

   $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ó $x \leq -a$
6. $-|a| \leq a \leq |a|$
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$
8. $|a - b| \leq |a| + |b|$

9. $\sqrt{a^2} = |a|$