CONCEPTO DE DERIVADA .

Definición: Sea I in intervalo abierto, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Diremos que f es derivable en a si existe y es finito el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

En este caso, el límite se designa por $f\ '(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a.

Si este límite existe cuando $h \to 0^+$ ó $h \to 0^-$, a este límite se le llama derivada por la derecha ó derivada por la izquierda de f en a (derivadas laterales) y se escriben como $f_+\ '(a)$, $f_-\ '(a)$ respectivamente.

Proposición: La condición necesaria y suficiente para que una función sea derivable en un punto es quelas derivadas laterales existan y sean iguales.

Teorema: Si f es derivable en $x = a \Rightarrow f$ es continua en $x = a$.

El recíproco es falso.

Definición: (Función derivable en un intervalo)

Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en cada uno de los puntos de I diremos que f es derivable en I.

Diremos que f es derivable en un intervalo $[a,b]$ siempre que sea derivable en el intervalo abierto(a,b) y, además, existan las derivadas laterales $f_+{}'(a)$ y $f_-{}'(b)$

RECTA TANGENTE. OBSERVACIONES.

1.De entre todas las rectas que pasan por el punto $(a,f(a))$, la tangente es la que mejor aproxima a la curva $y = f(x)$ en las proximidades de $x = a$.

2. La ecuacion de la recta tangente en el punto $x = a$ sería:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

3. Si la función admite derivada por la derecha en el punto $x = a$, entonces puede hablarse de semitangente por la derecha a la curva en el punto $(a,f(a))$. Dicha semitangente es la semirecta:

$$y = f(a) + f_+'(a)(x - a) \qquad x \geq a$$

Análogamente, si existe la derivada por la izquierda $f'_-(a)$, se define la semitangente por la izquierda.

De hecho si tiene derivadas laterales finitas y distintas, la gráfica presenta un pico en el punto $x = a$ y se suele decir que el punto a es un punto anguloso.

4. Si $f'(a) = 0$, la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a es una recta horizontal.

5. La recta perpendicular a la tangente en el punto $(a, f(a))$ es la normal a la curva en dicho punto.

La ecuación de la normal a f en a, si $f'(a) \neq 0$ es:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Si $f'(a) = 0$, la normal sería $x = a$

6. En el caso en el que $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$.

La gráfica va presentar una tangente vertical.

Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$
c constante	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\log_a x \quad (a > 0)$	$\frac{1}{x \log a}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$a^x \quad (a > 0)$	$a^x \log a$
e^x	e^x

$senx$	$\cos x$
$\cos x$	$-senx$
tgx	$1 + tg^2x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot gx$	$-1 - \cot^2 x = \dfrac{-1}{sen^2 x}$
$arcsenx$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$arctgx$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
shx	chx
chx	shx

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LAS FUNCIONES DERIVABLES .

Teorema: Sean f y g dos funciones reales definidas en I, si son derivables en $x = a \Rightarrow$

$i)$ $(f + g)$ es derivable en $x = a$, siendo

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$ii)$ (fg) es derivable en $x = a$, siendo

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$$

$iii)$ $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $x = a$, si $g(a) \neq 0$, siendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

$vi)$ kf es derivable en $x = a$, $k \in \mathbb{R}$, siendo

$$(kf)'(a) = kf'(a)$$

Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena.

Teorema: Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset \mathbb{R}$. Si f es derivable en el punto $x = a$ y g es derivable en $f(a) \in J$, entonces $h = g \circ f$ es derivable en $x = a$ y su derivada es:

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Derivada de la función inversa.

Teorema: Sea $f : A \to \mathbb{R}$ derivable en $x = a$, con $f'(a) \neq 0$, y sea $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ la inversa de f, cuya existencia suponemos. Entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y se cumple.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$