PROBLEMAS DE CÁLCULO. Curso 2005/2006
Funciones derivables. Teorema de Taylor

1.- Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y calcular la expresión de la función derivada:

a) $f(x)=\begin{cases} 3-\dfrac{x^2}{|x|}, \text{ si } x\neq 0 \\ 3 \quad , \quad \text{si } x=0 \end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases} e^x ; & x>0 \\ 1; & x=0 \\ \dfrac{x^2}{2}+1+x ; & x<0 \end{cases}$; c) $h(x)=\mathrm{e}^{|x|}$; d) $i(x)=\sqrt[5]{x-1}$

2.- Si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x-1}{x^2}-1, & \text{si } x>0 \\ mx+n, & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ determinar m y n para que f y f′ sean continuas en todo $\Re$.

3.- Dadas las funciones reales de variable real definidas por:

$f(x)=\begin{cases} (x-1)+\cos(x-1) ; & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} ; & \text{si } x>1 \end{cases}$ $\quad \mathrm{g(x)}=1-(x-1)^{\frac{2}{3}}$ $\quad \mathrm{h(x)}=(x-1)\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

a) Determinar los puntos en los que son continuas y los puntos en los que son derivables.
b) ¿Cumplen en [0,2] las condiciones del teorema de Rolle?. Razona los motivos de tu respuesta.

4.- Determinar el ángulo que forman las gráficas de las funciones f(x)=x^2-1 y g(x)=x^3-x en los puntos de corte.

5.- Hallar los puntos de las gráficas de las siguientes funciones en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, siendo $f(x)=2x^4-x^2+x$; $g(x)=x^4-7x^3+13x^2+x+1$

6.- Dados tres números reales a, b y c, sea f la función real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \text{ si } x\leq c \\ ax+b & ; \text{ si } x>c \end{cases}$$

a) Determinar a y b en función de c para que f sea derivable en c.
b) Para c = 2 y sabiendo que f es derivable en 2, hallar un punto del intervalo [1,3] en el que la tangente a la gráfica de f sea paralela a la recta que pasa por los puntos (1, f(1)) y (3, f(3)).

7.- Considerar la función f definida por $f(x)=5+(x-1)^4(x+2)^3$.
Probar:
   a) f′(x)=0 tiene al menos una solución en el intervalo (-2,1), sin calcular la expresión de f′.
   b) f(x)=0 sólo tiene una solución menor que -2.
   c) f(x)=0 no tiene ninguna solución mayor que 1.

8.- a) Determinar las constantes a y b de manera que la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} \ln(x)-1 ; & \text{si } 1\leq x\leq e \\ ax+b ; & \text{si } e<x\leq e^2 \end{cases}$$

verifique las condiciones del teorema del valor medio de Lagrange en [1, e^2].
b) Encontrar algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente sea paralela a la cuerda que une los extremos de la curva.

9.- Sea $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+2 ; & x<0 \\ x^2-3x+2; & x\geq 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.
b) Hallar los extremos de f en [-2,2]
c) Demostrar que la ecuación f(x) = 0 tiene una sola raíz en el intervalo (-1,1).

10.- Calcular el máximo y el mínimo en [-1,1] de la función $f(x)=\sqrt[3]{x}+|x|$.
¿Podemos asegurar que los extremos se alcanzan en puntos de ese intervalo?. ¿Porqué?.

11.- Dada la función $f(x)=x+\ln\left(x^2-1\right)-5$.
a) Calcular intervalos de crecimiento y decrecimiento así cómo los máximos y mínimos relativos.
b) ¿Cuántos cortes con el eje de abcisas tiene la gráfica de esta función?. Razona la respuesta.

12.- Probar que si f es una función derivable en todo $\Re$ con f(0) = 0 y $|f'(x)|<1$ para todo $x\in\Re$, entonces: $|f(x)|<|x|$ para todo $x\neq 0$.

13.- Utilizar L´Hôpital para calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\operatorname{sen}x)}{\ln x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}\right)$

14.- Calcular los desarrollos de Taylor en el cero con resto de Lagange de las siguientes funciones:
$a)\ f_1(x)=\dfrac{3}{3-x}$; b) $f_2(x)=\ln(1-x)$; c) $f_3=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$; d) $f_4=\ln(x^2-3x-4)$; e) $f_5=\cos x$

15.- Dada la función $f(x)=\sqrt{1+x}$. Calcular el polinomio de Taylor en el cero (Mac-Laurin) de grado 4 y utilizarlo para aproximar el valor de $\sqrt{1.02}$ acotando el error cometido en dicha aproximación.

16.- Acotar el error cometido al utilizar :
a) $x-\dfrac{x^2}{2}$ como aproximación de ln (1 + x) en el intervalo [0, 0.2].
b) $x-\dfrac{x^3}{6}$ como aproximación de sen x en el intervalo [0, 0.5].

17.- Estimar con los tres primeros términos del desarrollo de Mac- Laurin de la función $\sqrt[3]{2-x}$ el valor de $\sqrt[3]{1.8}$. Acotar el error cometido en la estimación.

18.- Utilizar la forma infinitesimal del resto de Taylor para calcular los siguientes límites:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{1-\cos\frac{x}{2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-x^2}-6\operatorname{sen}x+5x}{\operatorname{sen}^5 2x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-(1+4x)^{1/2}}{\ln(1-x^2)}$

19.- Estudiar crecimiento y extremos de las funciones:
a) $f_1(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$; b) $f_2(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$; c) $f_3(x)=\dfrac{x}{\ln x}$; d) $f_4(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$; e) $f_5(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

20.- Sea la función $f(x)=\dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$. Se pide:

a) Continuidad y derivabilidad de f.
b) ¿Tiene f extremos absolutos en [-2,2]?. Justificar la respuesta y, en caso afirmativo, calcúlense.

21.- Dada la función $f(x)=\dfrac{senx}{x}$, probar razonadamente que:

a) $f\left(\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\right)\subseteq\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$; b) $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)\subseteq\left[\dfrac{2}{\pi},1\right]$

22.- Probar que la ecuación senx = $(x^3)/5$ admite tres raíces reales exactamente. Separarlas en tres intervalos disjuntos.