

PROBLEMAS TEMA2. Curso 2005/2006.

Sucesiones Numéricas.

1.- Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$; b) Si $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a < b$ entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < b$

2.- Probar que las siguientes sucesiones, dadas en forma recurrente, son convergentes y calcular su límite:

a) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$; b) $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$;

c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $7a_{n+1} = a_n^3 + 6$

3.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ con $0 < a < b$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - \sqrt{n^2 + bn - 1})$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 - 1})$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 2^n)^{\frac{1}{2 + 3n}}$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n}}$;

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1}\right)^{\frac{2n^3 + 3}{n}}$; g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{n!}$;

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \dots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}$; j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} + i \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{3n^2 - 3}\right)^{\frac{2n-1}{3n}} + i\sqrt[3]{3^n + 2^n}$.

4.- Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, probar que:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2^n} + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_2}{2^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n\right) = 2a$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + 4a_2 + \dots + n^2 a_n}{n^3}\right) = \frac{a}{3}$

5.- Probar, utilizando acotaciones, que los siguientes límites son ciertos:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}\right) = 0$;

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{1})(1 + \sqrt{2}) \dots (1 + \sqrt{n})}{\sqrt{n!}} = \infty;$$

6.- Determinar, en función del parámetro p ($p \geq 0$), los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{p}{(1+p)(1+p^2) \dots (1+p^n)}}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{n^3}}{n^p}$$

7.- Hallar la relación entre a y b para que se verifique, en cada caso, las igualdades siguientes:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+a}{n+b} \right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+b}{n+2} \right)^{4+nb}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+b}{n+2} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{an+1}$$