# PROBLEMAS TEMA1. Curso 2005/2006
# Números Reales y Complejos.

**1.-** Encontrar los números reales que definen las inecuaciones:

**a)** $x^2 > 3x+4$ ; **b)** $x^2+x+2 > 2$ ; **c)** $4 < x^2 < x$ ; **d)** $\frac{1}{x} < x$; **e)** $\frac{x-2}{x+1} > 0$;
**f)** $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} < 0$.

**2.-** Probar que si $0 < x < y$, entonces**:**

**a)** $x^2 < y^2$; **b)** $x^{\frac{1}{2}} < y^{\frac{1}{2}}$ ; **c)** $x < (xy)^{1/2} < y$**.**

**3.-** Probar que si $0 < x < y$, entonces $x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$.

**4. -**Probar que para $x \in \mathbb{R}$ se verifican las implicaciones:

**a)** Si $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$; **b)** Si $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$. ¿Que ocurre para $x < 0$?

**5**. - Probar que si x e y no son ambos nulos se verifica $x^2+xy+y^2 > 0$.

**6.-** Demostrar que si $|x| \leq 1$, entonces $\left|x^4+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\right| < 2$.

**7.**- Sabiendo que $2 \leq x \leq 3$ acotar la expresión: $\frac{|2x^2-3x+1|}{|2x-1|}$.

**8.-**Encontrar todos los números reales que verifiquen:

**a)** $|x+2| < 3$; **b)**$|x^2-2| \leq 1$ ; **c)** $|x^2-2x+1| \geq 5$ ; **d)** $\left|2+\frac{5}{x}\right| > 1$;
**e )** $|x-2||x-3| < 1$; **f)** $|x-1| < |x|$

**9.-** Si $a < x < b$ y $a < y < b$, probar que $|x-y| < b-a$.

**10**.- Sabiendo que $3 \leq x \leq 10$, $15 \leq y \leq 25$ y que $\frac{1}{r} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, encontrar los valores entre los que estará r.

**11.**- Determinar el conjunto de pares de números reales (x,y) que satisfagan:

**a)** $|x| = |y|$; **b)** $|xy| = 2$; **c)**$|x|-|y| = 2$; **d)** $|x|+|y| = 1$.

**12**.-Siendo $z_1 = 2-i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 2+i$ y $z_4 = 3i$, calcular $\frac{z_1z_2-z_3z_4}{z_1-z_2}$.

**13**.- Expresar en forma trigonométrica y representar los siguientes números complejos:

$z_1 = -7$; $z_2 = 6i$; $z_3 = \sqrt{3}+i$; $z_4 = 3+3i$; $z_5 = -2-2i$; $z_6 = 2-\sqrt{2}\,i$.

**14.**- Operar y expresar en forma binómica los números complejos:

$z_1 = 2_{\frac{\pi}{3}} : 5_{\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = 7_{\frac{\pi}{2}} \cdot 3_{\frac{\pi}{2}}$; $z_3 = 1_{\frac{\pi}{4}} : 2_{\frac{3\pi}{4}}$

**15.-** Encontrar, geométrica y análiticamente los números complejos que verifican:

**a)** $|z| = 3$; **b)** $|z-1| < 1$ ; **c)** $|z-1| < |z+1|$; **d)** $|z| < |z+1|$;
**e)** $|z| > |2z+i|$

**16.-** Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos distintos. hallar la relación entre ellos para que $r = \frac{(z_1+z_2)i}{z_1-z_2}$ sea un número real.

**17**.- Determinar los números complejos $z$ tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

**18**.- Encontrar los $z$ tales que $z^3\,\bar{z} = -1$.

**19**.- Hallar los valores de:

**a)** $\sqrt[3]{i}$ ; **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{i}}$ ; **c)** $\sqrt[4]{\dfrac{1+i}{2-i}}$ ; **d)** $\sqrt{\dfrac{2}{-1-i}}$ ; **e)** $\sqrt[6]{-64}$ .

**20**.- Calcular el valor de $a$ y $b$ para que $\dfrac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y de módulo 1.

**21**.- Se considera el número complejo $z = \dfrac{3-2ai}{4-3i}$ , $a \in \mathbb{R}$. Determinar $a$ para que $z$ verifique, en cada caso, que:

a) Sea un número imaginario puro.
b) Sea un número real.
c) Esté sobre la bisectriz del primer cuadrante.

**22.**- Encontrar los números complejos $z$ tales que $\frac{\pi}{2}$ es un argumento de $\dfrac{z+1}{z+2}$.

**23**.- Determinar los números complejos $z_1$ y $z_2$ que verifican :

a) La suma de sus cuadrados es 3.
b) Su cociente $\frac{z_1}{z_2} = ki$ , siendo $k$ un número entero.
c) El módulo del anterior cociente es 2.

**24.**- Hallar los números complejos $z$ tales que $1,\ z,\ 1+z^2$ estén alineados.

**25**.- Un triángulo equilátero tiene el centro en el punto $(1,1)$ y uno de sus vértices es el punto $(1,3)$. Hallar los otros dos vértices.

**26.**- Encontrar los números complejos de módulo 1 tales que sus raíces cuartas tienen sus afijos en las bisectrices de los cuadrantes del plano.