

EXÁMEN FINAL DE CÁLCULO

9 de Julio de 2004

1.- a) Estudiar los números reales que verifican:

$$|x - 1| + |x + 1| < 1$$

b) Calcular los números complejos z que cumplan:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2+z}{3+z}\right) = \operatorname{Im}z$$

2.- a) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones acotadas. Demostrar que $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ y $(a_n b_n)$ están acotadas.

b) Calcular el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(2n)(2n+4)} \quad \text{con } a > 0$$

3.- a) Si f es una función continua en $x = a$, estudiar la derivabilidad de $g(x) = |x - a|f(x)$ en $x = a$.

b) Hallar los máximos y mínimos de $f(x) = x^x$ con $x > 0$.

c) Calcular los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del polinomio $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, sabiendo que :

i) P tiene un mínimo en $x = 3$.

ii) P tiene un máximo en $x = 2$.

iii) $P(0) = 1$, $P(1) = 24$

d) Con los valores $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ encontrados del polinomio anterior, calcular el número de soluciones de la ecuación $P(x) = 0$

4.- Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$

a) Obtener la fórmula de MacLaurin de la función f , de orden n , con resto de Lagrange.

b) Utilizar el polinomio de MacLaurin de orden tres de f para dar una aproximación de $f(1/2)$.

c) Dar una cota del error cometido en la aproximación del apartado anterior utilizando el resto de Lagrange de orden tres.

5.- a) Estudiar la convergencia de $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

b) Calcular, razonadamente $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{x^2+1} \frac{e^{-t}}{t} dt}{3x^2}$

c) Enunciar los resultados teóricos utilizados en el ejercicio.

Puntuación: Todos los ejercicios valen 2 puntos

Tiempo: 3 horas y media.