

FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

4.1 Definición de función real.

Definición: Una función real de variable real es una aplicación de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{R} .

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

El dominio de una función es el conjunto de números reales donde está definida la función.

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$$

La imagen de una función es el conjunto de números reales que se obtiene al aplicar f a su dominio

$$Imf = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} \text{ con } f(x) = y\}$$

4.2 Operaciones con funciones.

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $A = \text{Dom}f$ y $B = \text{Dom}g$.

Definimos:

$$i) (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A \cap B$$

$$ii) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in A \cap B$$

$$iii) (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in A$$

$$iv) \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$$

Definición: Dadas dos funciones $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$, se define la función compuesta $g \circ f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Definición: Sea $f : A \rightarrow B$ una función biyectiva, entonces existe una única función que llamaremos función inversa de f , $f^{-1} : B \rightarrow A$ que verifica:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$$

4.3 Propiedades de las funciones.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, diremos que:

i) f es monótona creciente si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

ii) f es monótona decreciente si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, diremos que:

i) f es par si $f(x) = f(-x)$

ii) f es impar si $f(x) = -f(-x)$

NOTA: La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje OY.

Definición: Una función real de variable real está acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq K \quad \forall x \in A$.

Está acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq K \quad \forall x \in A$.

Definición: Una función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Definición: Una función es periódica si \exists un $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, tal que $f(x + h) = f(x)$
 $\forall x \in A$.