

DEFINICIÓN DE SUCESIÓN.

Definición: Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en los reales:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow x(n)$$

- Una sucesión asigna a cada número natural un número real determinado de manera única.
- A cada elemento de la sucesión lo denotamos por $x_n = x(n)$ y lo llamaremos término.
- La sucesión se denota por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ó simplemente (x_n)
- Al elemento x_n se le llama término n-ésimo de la sucesión.

Definición: Una sucesión en forma recursiva o inductiva vendrá dada cuando demos el valor de x_1 y una fórmula para obtener x_{n+1} a partir de x_n .

OPERACIONES CON SUCESIONES.

Definición: Si (x_n) y (y_n) son dos sucesiones de números reales, se define:

Suma: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$

Producto: $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$

Cociente: Si (z_n) es una sucesión con $z_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{(x_n)}{(z_n)} = \left(\frac{x_n}{z_n} \right)$

SUCESIONES CONVERGENTES.

Definición: Diremos que el número real l es el límite de la sucesión (x_n) y escribimos como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$$

si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$
 $\Rightarrow |x_n - l| < \epsilon$

Definición: Se dice que la sucesión (x_n) es convergente si existe $l \in \mathbb{R}$ tal

que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

UNICIDAD DEL LIMITE.

Teorema: Una sucesión (x_n) si tiene límite, este es único, es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ entonces $a = b$.

SUCESIONES ACOTADAS.

Definición: Una sucesión (x_n) es acotada si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto una sucesión (x_n) está acotada si y sólo si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de sus términos, está acotado en \mathbb{R} .

Teorema: Toda sucesión de números

reales convergente, está acotada.

PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES.

Teorema: Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de números reales que convergen a x e y respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces :

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x + y$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = xy$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda x$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{x}{y} \quad \text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

Nota: Igualmente para sucesiones convergentes se tiene:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x_n) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln x$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = a^x \text{ con } a > 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = x^y$$

DESIGUALDADES ENTRE SUCESIONES.

Teorema: Sea (x_n) una sucesión convergente de números reales, con $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$.

Teorema: Sea (x_n) y (y_n) dos sucesiones convergentes con $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Entonces :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Teorema: Sean (x_n) , (y_n) y (z_n) sucesiones de números reales tales que

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n. \text{ Entonces :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n.$$

Teorema: Sea (x_n) una sucesión de números reales estrictamente positivos, tales que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Si $L < 1$, entonces (x_n) converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

SUCESIONES MONÓTONAS.

Definición: Sea (x_n) una sucesión de números reales. Diremos que (x_n) es monótona creciente si :

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \dots \dots x_n \leq x_{n+1}$$

Diremos que es monótona decreciente si:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \dots x_n \geq x_{n+1}.$$

Teorema de la convergencia monótona:

Una sucesión de números reales es convergente \Leftrightarrow es acotada. Además:

a) Si (x_n) es creciente y acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$.

b) Si (y_n) es decreciente y acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf y_n$.

SUBSUCESIONES.

Definición: Sea (x_n) una sucesión y sea $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Entonces a la sucesión $(x_{r_n}^*)$ $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots$ se le llama subsucesión de (x_n) .

Teorema: Si una sucesión (x_n) converge a x , entonces cualquier subsucesión suya también converge a x .

SUCESIONES DIVERGENTES.

Definición: Diremos que la sucesión (x_n) tiene límite $+\infty$ y escribimos como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

Si $\forall M, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$
 $\Rightarrow x_n > M$.

Diremos que la sucesión (x_n) tiene límite $-\infty$ y escribimos como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$$

Si $\forall M, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$
 $\Rightarrow x_n < M$.

Definición: Las sucesiones que tienden a $\pm \infty$, se llaman divergentes.

PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES DIVERGENTES.

Teorema: Una sucesión de números reales es divergente \Leftrightarrow es no acotada.

a) Si (x_n) es creciente y no acotada \Rightarrow
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$

b) Si (x_n) es decreciente y no acotada \Rightarrow
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

Teorema: Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de números reales con
 $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

SUCESIONES EQUIVALENTES.

Definición: Se dice que (x_n) y (y_n) son equivalentes si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. Lo escribiremos como $x_n \sim y_n$

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, a la sucesión (x_n) se le dice que es un infinitésimo.

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, a la sucesión (x_n) se le dice que es un infinito.

Proposición: Sean (x_n) , (y_n) y (z_n) sucesiones de números reales tales que $x_n \sim y_n$, entonces:

i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n$ existe $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n z_n$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n z_n$$

ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{x_n}$ existe $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{y_n}$ existe y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{y_n}$$

Criterio de Stolz: Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ existe \Rightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \text{ siempre que :}$$

i) (y_n) sea estrictamente creciente y

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$.