PROBLEMAS DE CÁLCULO. Curso 2005/2006
Funciones, límites y continuidad

1.- Encontrar el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$; b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 5x + 6}$; c) $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(2-x)}$; d) $i(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$; e) $j(x) = \sqrt{-x} + 1$

2.- Estudiar la paridad de las funciones:

a) $f(x) = x^2 - |x|$; b) $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; c) $h(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$, con $a > 1$.

3.- Dar las definiciones de :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

4.- Estudiar si existe y calcular, cuando se pueda, el límite de las funciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}(e^{-x})$; d) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln \sqrt{x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-4}\right)$

5.- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a^x}{2x \ln a}$
 f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)x^2$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}$; h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4}}$; i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27}}{\sqrt[3]{x^2 + 6x - 27}}$
 j) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$; k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(1 - \cos(1/x))$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x}$; m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$

6.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones según los valores del parámetro "a":

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3; & x \neq 2 \\ 2a - 3; & x = 2 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} e^{ax}; & x \leq 0 \\ x + 2a; & x > 0 \end{cases}$; c) $h(x) = \begin{cases} 4.3^x; & x < 0 \\ 2a + x; & x \geq 0 \end{cases}$

7.- Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad.

b) Si se consideran definidas sobre $[-1, 2]$, ¿están acotadas?, ¿alcanzan su máximo y su mínimo?.

c) Hallar $f([-1, 2])$.

8.- Se consideran las funciones reales de variable real:

$f(x) = \begin{cases} x + \ln x & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a) Probar que f y g son continuas en todo $\mathbb{R}$.

b) ¿Está acotada (gof) en el intervalo $[-1, 2]$?

- c) Probar que existen dos puntos x_1, x_2 en el intervalo $(1, e^2)$ tales que $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ y $f(x_2) = \frac{3\pi}{2}$.
- d) Deducir del apartado anterior que existe x_0 en el intervalo $(1, e^2)$ tal que $(\text{gof})(x_0) = 0$.

9.- Probar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una raíz real:

a) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 1 = 0$; b) $x^{50} + \frac{133}{1+x^2 + \text{sen}^2 x} = 70$; c) $x2^x = 1$; d) $\frac{x^4 + 2x^2 + 5}{x-1} + \frac{x^6 + 2x^4 + 6}{x-7} = 0$

10.- Se considera la función $f(x) = 1/(x-3)$ definida en $(3,7)$. ¿Es continua?. ¿Está acotada superiormente?. ¿Contradice algún teorema?.

11.- Calcular $f([-1,4])$ siendo

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in [-1,4]$$

12.- Sea $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[-1,1]$ y tal que $f(-1) = f(1)$. Demuéstrese que existe algún punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = f(c-1)$.