Lógica Difusa

Una introducción práctica

Técnicas de Softcomputing

Carlos González Morcillo

Carlos.Gonzalez@uclm.es

Índice general

Capítulo **1**

Introducción

△ *La Lógica Difusa proporciona un mecanismo de inferencia que permite simular los procedimientos de razonamiento humano en sistemas basados en el conocimiento. La teoría de la lógica difusa proporciona un marco matemático que permite modelar la incertidumbre de los procesos cognitivos humanos de forma que pueda ser tratable por un computador. En este primer capítulo se describirán los fundamentos y características de este mecanismo de representación de la incertidumbre.*

1.1. Introducción

El ser humano posee grandes habilidades para comunicar su experiencia empleando reglas lingüísticas vagas. Por ejemplo, un famoso cocinero de televisión podría dar instrucciones para tostar pan como:

1. Cortar dos rebanadas de pan *medianas*.
2. Poner el horno a temperatura *alta*.
3. Tostar el pan hasta que quede de color *ligeramente marrón*.

Figura 1.1: Conocimiento experto en un dominio de aplicación concreto.

El uso de esos términos lingüísticos *en cursiva* podrían ser seguidos sin problema por un humano, que es capaz de interpretar estas instrucciones rápidamente. La lógica convencional no es adecuada para procesar este tipo de reglas. Por ejemplo, si pasáramos un día con Tiger Woods para aprender a jugar al golf, al final de la jornada podríamos tener un montón de reglas del tipo:

- Si la *bola está lejos del hoyo* y el *green está ligeramente inclinado hacia la derecha*, entonces *golpear la bola firmemente* empleando un ángulo *ligeramente inclinado hacia la izquierda de la bandera*.
- Si la *bola está muy cerca del hoyo* y el *green entre la bola y el hoyo está plano*, entoncces *golpear la bola directamente hacia el hoyo*.

Estas reglas son muy descriptivas y pueden ser fácilmente entendibles por un humano, pero difícilmente representables en un idioma que pueda ser entendido por un computador. Palabras como "*lejos*", "*muy cerca*" no tienen fronteras bien definidas, y cuando se quieren trasladar a código pueden resultar descripciones artificiales. Por ejemplo, el término *Distancia* se podría codificar con este conjunto de intervalos:

- **Cerca**: La bola está entre 0 y 2 metros del hoyo.
- **Medio**: La bola está entre 2 y 5 metros del hoyo.
- **Lejos**: La bola está más allá de 5 metros del hoyo.

Con esta representación, ¿qué ocurre con una bola que está en 4.99 metros del hoyo? Empleando estos intervalos, el ordenador lo representaría firmemente en el intervalo “Medio”. Y si incrementamos unos pocos centímetros, lo catalogaría como “Lejos”. Esto se puede mejorar creando intervalos más pequeños, pero el problema base seguiría siendo el mismo por el uso de intervalos discretos. Comparado con el modo de razonar de un humano, estos términos lingüísticos se deben corresponder con fronteras vagas, donde 4.99 metros debería estar más asociado al término “lejos” que “media distancia”.

Queda claro que el conocimiento experto presenta a menudo, características de vaguedad e imprecisión, debido a tres razones principalmente:

1. **Pereza**: Obtener una lista completa de todas las variables que intervienen en el dominio del problema puede ser demasiado trabajo. Además, como el mundo real es no determinista (aleatoriedad y excepciones), hay veces que no es posible establecer completamente todas las variables del entorno.
2. **Ignorancia Teórica**: En la que no existe una lista completa de factores a tener en cuenta para el dominio del problema (no se conoce un método teórico para modelar el problema).
3. **Ignorancia Práctica**: Incluso conociendo todas las variables, puede ser difícil obtener datos concretos asociados para su estudio. Además, esta información puede estar incompleta, e incluso ser errónea (por ejemplo en el ámbito médico, llena de síntomas incorrectos, mentiras deliberadas, falsos positivos...).

Esta incertidumbre en el modelado de conocimiento experto existe en multitud de disciplinas (médicas, ciencias, ingeniería, derecho, educación...). En Inteligencia Artificial se aplica en multitud de áreas de trabajo, como visión por computador, procesamiento del lenguaje natural, procesamiento de la información, aprendizaje automático, juegos...

1.1.1. Tratamiento de la Incertidumbre

Existen multitud de enfoques para el tratamiento de la incertidumbre. Las primeras aproximaciones vienen de principios del siglo XIX, con un tratamiento de la información puramente probabilista. Los primeros sistemas expertos de inicio de los 70 modelaron el conocimiento con un enfoque puramente lógico, con las limitaciones que conlleva este tipo de enfoques. La siguiente generación de sistemas expertos emplearon técnicas probabilistas con resultados prometedores. El principal problema de esta aproximación fue el crecimiento exponencial de las probabilidades necesarias para calcular la distribución conjunta de probabilidad cuando el número de variables aumentaba. De esta forma, surgieron otras aproximaciones entre las que cabe destacar:

Métodos No Numéricos

Existen algunas aproximaciones no numéricas que utilizan un razonamiento mucho más cercano al humano (cualitativo). Uno de los métodos más ampliamente estudiados en esta categoría es el **razonamiento por defecto**, que trata las conclusiones de los sistemas de reglas como *válidas hasta que se encuentre una razón mejor para creer alguna otra cosa*. Las redes cualitativas y los sistemas de mantenimiento de coherencia son otros ejemplos de métodos no numéricos para el tratamiento de la incertidumbre.

Métodos Numéricos

De entre los métodos numéricos, cabe destacar la familia de los **métodos probabilistas**, que asocian un valor numérico (*grado de creencia*) entre 0 y 1 para resumir la incertidumbre sobre las oraciones. Así, una probabilidad de 0.8 sobre una oración no significa 80 % verdadero, sino un 80 % de grado de creencia sobre la oración (las creencias dependen de las percepciones recibidas por el agente inteligente hasta el momento, que constituyen la evidencia sobre la que se hacen las afirmaciones sobre probabilidades. Las probabilidades pueden cambiar cuando se adquieren más evidencias.

Ejemplo Probabilidades

Al sacar una carta de la baraja, el agente asigna 1/40 de sacar el as de copas. Después de mirar la carta, la probabilidad será de 0 o 1.

Existen varias familias de técnicas probabilistas entre las que distinguimos los métodos exactos (Redes bayesianas, Diagramas de influencia...) y los aproximados (Método Bayesiano subjetivo, Factores de certeza...).

Existen otros métodos numéricos no probabilistas para el tratamiento de la incertidumbre. La **teoría de Dempster-Shafer** que utiliza grados de creencia dados por intervalos de valores para representar el conocimiento. La **lógica difusa** es igualmente un método de razonamiento aproximado no probabilista, que puede definirse como una extensión de la lógica multivaluada que facilita enormemente el modelado de información cualitativa de forma aproximada. Su éxito se debe principalmente a la posibilidad de resolver problemas de una gran complejidad y poco definidos que, mediante métodos tradicionales, son difíciles de solucionar.

1.2. ¿Qué es la Lógica Difusa?

Básicamente la *Lógica Difusa* es una lógica multivaluada que permite representar matemáticamente la incertidumbre y la vaguedad, proporcionando herramientas formales para su tratamiento.

Precisión Vs. Significado

Lo más relevante de la información es su significado, no la precisión. Por ejemplo, si nos va a caer una pesa sobre la cabeza, nos interesa que alguien nos grite rápidamente "Cuidado, arriba!!", y no que nos diga que "un objeto de 500Kg de masa, se está aproximando a tu cabeza siguiendo unas trayectoria perpendicular y recta a una velocidad de 47.32 m/seg".

Como indica Zadeh [3], "*Cuando aumenta la complejidad, los enunciados precisos pierden su significado y los enunciados útiles pierden precisión.*", que puede resumirse como que *"los árboles no te dejan ver el bosque"*.

Básicamente, cualquier problema del mundo puede resolverse como dado un conjunto de variables de entrada (espacio de entrada), obtener un valor adecuado de variables de salida (espacio de salida). La lógica difusa permite establecer este *mapeo* de una forma adecuada, atendiendo a criterios de significado (y no de precisión).

Le término *Lógica Difusa* fue utilizado por primera vez en 1974. Actualmente se utiliza en un amplio sentido, agrupando la teoría de conjunto difusos, reglas si-entonces, aritmética difusa, cuantificadores, etc. En este curso emplearemos este significado extenso el término.

1.2.1. Diferencias con Probabilidad

Los conceptos empleados en *Lógica Difusa* y *Probabilidad* están realacionados en cierto modo, pero son totalmente diferentes. De forma resumida, la **probabilidad** representa información sobre frecuencia de ocurrencias relativas de un evento bien definido sobre el total de eventos posible. Por su parte, el **grado de pertenencia difuso** representa las similitudes de un evento con respecto a otro evento, donde las propiedades de esos eventos no están definidas de forma precisa.

Veamos un ejemplo, un superviviente de un accidente de avión se encuentra en medio del desierto. Hace dos días que está caminando sin agua en busca de algún poblado cercano donde puedan socorrerle. De repente encuentra dos botellas de líquido, etiquetadas como se muestra en la figura 1.2. La botella A difusa está etiquetada como que contiene líquido potable con un grado de pertenencia 0.8, mientras que la botella B probabilista está etiquetada como que contiene con probabilidad 0.8 un líquido potable. ¿Cuál debería elegir el superviviente?

Figura 1.2: Botellas difusa y probabilista etiquetadas.

La botella A indica que el líquido que contiene es *bastante similar* a otros que son potables. Naturalmente este valor numérico depende de la función de pertenencia asociada al concepto de “líquido potable”. Supongamos que la función de pertenencia asocia 1 al agua pura, por lo que un valor de 0.8 indicaría que la botella A contiene agua no totalmente pura, pero todavía potable (o al menos no es un veneno, o algún líquido perjudicial para el organismo).

La probabilidad asociada a la botella B indica que, tras realizar un alto número de experimentos, el contenido de la botella B es potable el 80 % de las veces. Pero, ¿qué ocurre el otro 20 % de las veces?. En estas ocasiones, el líquido no era potable y, por tanto, hay un 20 % de probabilidad de que mueras bebiendo el líquido de esa botella porque contenga amoniaco en lugar de agua.

¿Qué debería elegir el superviviente si las botellas estuvieran etiquetadas con valores de 0.5 fuzzy y 0.5 de probabilidad? En este caso debería rechazar A porque un grado de pertenencia de 0.5 indicaría que el contenido de la botella no es muy parecido a los líquidos potables en ese dominio de conocimiento. La botella B tendría 0.5 de probabilidad de ser potable (también es incertidumbre total), pero tendría un 50 % de probabilidad de que el líquido fuera potable, por lo que debería *jugársela* y elegir la botella B.

1.3. Historia

Figura 1.3: Lofti A. Zadeh.

El concepto de *Lógica Difusa* fue creado por Lofti A. Zadeh, catedrático de la Universidad de Berkeley (California) [2]. En su propuesta, la lógica difusa fue presentada como una forma de procesamiento de información en la que los datos podrían tener asociados un grado de pertenencia parcial a conjuntos. Fue a mediados de los 70 cuando esta teoría se aplicó a los sistemas de control (cuando los pequeños ordenadores empotrados tuvieron suficiente potencia como para permitir su ejecución). Desde entonces el número de aplicaciones industriales y su utilización en productos de consumo (como veremos en la sección 1.5) ha crecido exponencialmente.

En una primera etapa (entre 1965 y 1974), Zadeh describió el concepto general de conjunto difuso y su función de pertenencia asociada que toma valores en el intervalo unitario. En esta primera etapa no se describieron en profundidad los mecanismos de razonamiento y la lógica asociada a esta representación.

En la segunda etapa (desde 1972 hasta el 2000) se introducen dos conceptos importantes: la variable lingüística y el concepto de reglas if-then. En la actualidad, la mayoría de aplicaciones de conjuntos difusos utilizan estos conceptos. Gracias al desarrollo de los conceptos de esta segunda etapa evolucionaron rápidamente aplicaciones de control difuso (espcialmente en Japón).

El término de **Soft Computing** apareció en 1981 en el BISC (*Berkeley Initiative in Soft Computing*), y puede ser definido como el uso de metodologías que proporcionan los fundamentos para el diseño, desarrollo y uso de sistemas inteligentes. Las principales metodologías que forman este grupo son la Lógica Difusa, la Computación Evolutiva, Métodos Probabilísticos y Aprendizaje Máquina. En general estas metodologías y técnicas se combinan ofreciendo mejores resultados.

La tercera etapa de desarrollo (desde 1996) se centra en la computación con palabras, empleando procesamiento del lenguaje natural para la búsqueda en internet y el desarrollo de respuesta automáticos. En la actualidad existen multitud de líneas de investigación que emplean intensivamente la teoría de la lógica difusa en diversidad de áreas de aplicación.

1.4. Características

El *Principio de Incompatibilidad* [3] dice que la descripción del comportamiento de un sistema complejo no puede realizarse de forma absolutamente precisa. Para solucionar este problema Zadeh plantea la necesidad de obtener herramientas capaces de manejar de forma rigurosa y fiable información imprecisa, lo cual obliga a desarrollar dos aspectos:

- **Representación de la información imprecisa**: Para esto lo que propone es el empleo de la Teoría de conjuntos difusos. Así como describir la experiencia de los sistemas complejos en sus relaciones entrada-salida mediante proposiciones condicionales del tipo *Si-Entonces* (Ejemplo: *Si la presión es muy alta Entonces vaciamos el recipiente*) de manera que las variables de entrada y las variables de salida quedan ligadas.
- **Inferencia sobre información imprecisa**: Ahora se necesita una forma de combinar esta información para obtener nuevos hechos. Entonces Zadeh establece la necesidad de un método de inferencia generalizado e introduce lo que se conoce como *Regla Composicional de Inferencia*.

A partir de este principio, se pueden describir las principales características esenciales de la lógica difusa y los sistemas difusos:

1. El **razonamiento exacto** puede verse como un caso particular del razonamiento aproximado. Cualquier sistema lógico puede ser *fuzzificado*. Mediante lógica difusa se puede formular el conocimiento humano de una forma sistemática, y puede ser fácilmente incluido en sistemas de ingeniería.
2. El conocimiento se interpreta como una colección de **restricciones difusas** sobre una colección de variables. Los sistemas difusos son especialmente interesantes para la definición de sistemas cuyo modelo exacto es difícil de obtener (es necesario introducir una aproximación).

Figura 1.4: En la actualidad, multitud de productos de consumo (lavadoras, microondas, cámaras de vídeo, televisores) y sistemas (ascensores, trenes, motores, frenos, control de tráfico) utilizan internamente métodos de lógica difusa.

3. La **inferencia** puede verse como un proceso de propagación de estas restricciones difusas.

4. Se utiliza ampliamente en sistemas de **ayuda a la decisión**. La lógica difusa permite obtener **decisiones** con valores incompletos o información incierta.

Los sistemas difusos son muy recomendables en aquellos **problemas muy complejos** donde no existe un modelo matemático simple asociado. Igualmente en procesos que obedecen a un **comportamiento no lineal**, la solución difusa plantea grandes ventajas. La solución difusa require que el **conocimiento experto** sea expresado **lingüísticamente**, requisito que es normalmente fácil de obtener.

1.5. Aplicaciones

Desde mediados de los años 70, la lógica difusa se ha utilizado ampliamente debido a varios factores. Uno de ellos es que el uso de conocimiento experto permite la **automatización de tareas**. En muchas áreas de aplicación se reduce considerablemente la necesidad de operadores que basan su conocimiento en la experiencia (y que difícilmente podría ser expresado con ecuaciones diferenciales). De este modo, si existe un conocimiento del proceso, es posible modelarlo mediante lógica difusa.

Los sistemas basados en lógica difusa son **fáciles de diseñar, modificar y mantener**. Pese a la pérdida de precisión, la reducción de tiempo de desarrollo y mantenimiento es muy relevante para su uso industrial.

Otro factor a tener en cuenta es que el control difuso permite diseñar soluciones de alta calidad que eviten las patentes existentes en otros sistemas de control. En Japón este tipo de controladores se asocia a modernidad, alta calidad y tecnológicamente potente. En Europa sin embargo se trata de ocultar el término “difuso” por su significado negativo. En la actualidad multitud de productos de electrónica de consumo emplean lógica difusa (ver Figura 1.4).

Por citar algunos ejemplos de uso, la empresa Japonesa *Matsuhita* utiliza en sus lavadoras un sistema de control que determina automáticamente el ciclo de lavado según el tipo, cantidad de suciedad y tamaño de la colada. Los estabilizadores de imágenes en sus cámaras digitales incorporan reglas que eliminan las vibraciones involuntarias de la mano del operario, comparando la imagen actual con las imágenes anteriores de la memoria. En el ámbito de la automoción, Mitsubishi y General Motors emplean sistemas de transmisión automática y control de temperatura basados en lógica difusa.

Otro caso de éxito es el metro de Sendai (Japón), que cuenta con 16 estaciones. El sistema de control difuso está dividido en dos módulos, uno para el control de la velocidad (similar al de [1]) y otro para la parada automática. Este controlador difuso ofrece importantes ventajas sobre los controladores convencionales, como el mayor confort en el viaje para los pasajeros y menor consumo de energía.

Capítulo **2**

Conjuntos Difusos y Variables Lingüísticas

△ *Como hemos visto en el capítulo anterior, la lógica difusa permite a un ordenador razonar en términos lingüísticos y reglas de una forma similar a como lo realizan los seres humanos. A diferencia de la lógica booleana clásica, la lógica difusa es* multi-valuada *definiendo grados de pertenencia (grados de verdad). En este capítulo estudiaremos dos entidades clave: los conjuntos difusos y las variables lingüísticas.*

2.1. Conjuntos Difusos

COMO lógica multi-valuada, en la definición de grados de pertenencia, la lógica difusa emplea valores contínuos entre 0 (que representa hechos totalmente falsos) y 1 (totalmente ciertos). Así, la lógica binaria clásica puede verse como un caso particular de la lógica difusa.

Zadeh propone en 1965 por primera vez la noción de **Conjunto Difuso** [2]. Este hecho marca el principio de una nueva teoría denominada *Teoría de Conjuntos Difusos*.

Los conceptos se asocian a conjuntos difusos (asociando los *valores de pertenencia*) en un proceso llamado *fuzzificación*. Una vez que tenemos los valores *fuzzificados* podemos trabajar con reglas lingüísticas y obtener una salida, que podrá seguir siendo difusa o *defuzzificada* para obtener un valor discreto *crisp*.

De este modo, a diferencia de la teoría clásica de conjuntos que se basa en el principio básico de la lógica de forma que un individuo pertenece o no pertenece a un conjunto, la idea básica de un conjunto difuso es que un elemento forma parte de un conjunto con un determinado **grado de pertenencia**.

De este modo una proposición no es totalmente (sino parcialmente) cierta o falsa. Este grado se expresa mediante un entero en el intervalo $[0, 1]$.

Un ejemplo claro es la representación de la altura de una población de individuos.

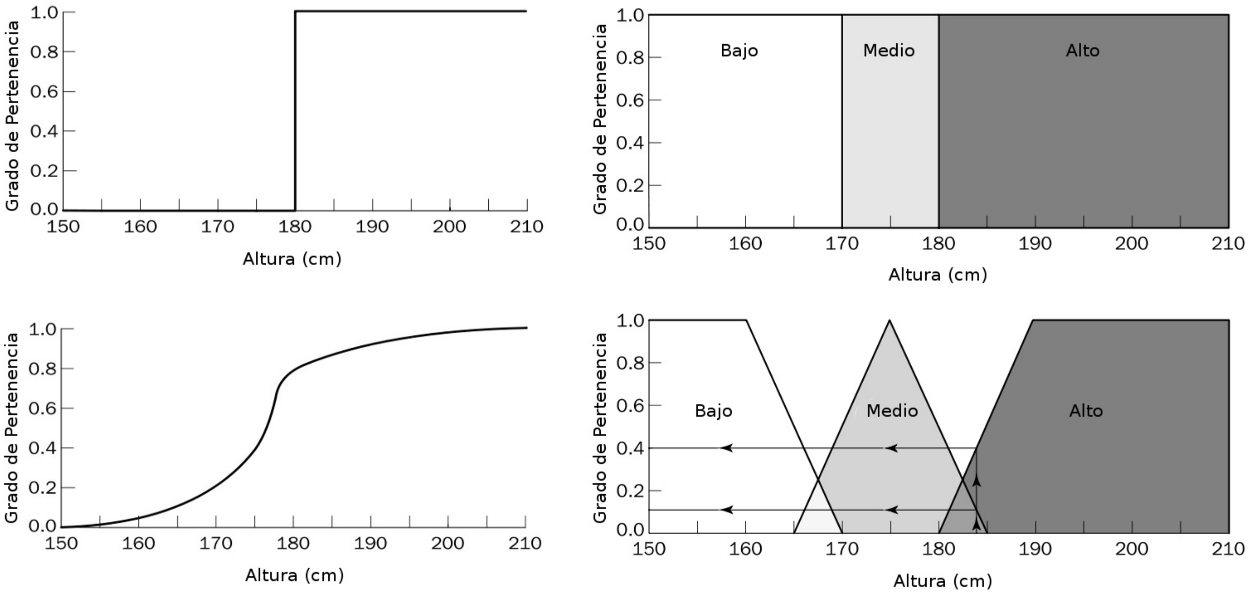

Figura 2.1: Descripción de conjuntos crisp (*arriba*) y fuzzy (*abajo*) de "persona alta".

Nombre	Altura	Crisp	Fuzzy
Paco	2.05	1	1.0
Juan	1.95	1	1.0
Tomás	1.87	1	0.95
Carlos	1.80	1	0.82
Pedro	1.79	0	0.71
Andrés	1.60	0	0.36

En la representación crisp, se *dibuja* una línea que separa claramente en 1.8m los individuos que son altos de los que no lo son, asociando un valor de pertencia estricto al conjunto de los altos a aquellos que superan esa altura. Sin embargo, el conjunto difuso permite expresar que Carlos tiene un grado de pertenencia al conjunto de los altos en $\mu_A(Altura) = 0{,}82$.

Así, un conjunto difuso proporciona una transición suave entre los límites de lo que sería un conjunto *crisp*. El **Universo del discurso** se define como todos los posibles valores que puede tomar una determinada variable (en el caso de la imagen anterior se correspondería con el eje horizontal de las gráficas, desde 150 a 210cm).

2.1.1. Definición de conjunto difuso

La teoría de conjuntos difusos es un intento de desarrollar una serie de conceptos para tratar de un modo sistemático el tipo de imprecisión que aparece cuando los límites de las clases de objetos no están claramente definidos. Un conjunto difuso puede definirse como una clase en la que hay una progresión gradual desde la pertenencia al conjunto hasta la no pertenencia; o visto de otra forma, en la que un objeto puede tener un grado de pertenencia definido entre la pertenencia total (valor uno) o no pertenencia (valor cero). Desde esta perspectiva, los conjuntos convencionales (o conjuntos *crisp*) pueden verse como un caso particular de conjuntos difusos; un conjunto difuso que sólo admite dos grados de pertenencia (uno y cero).

Un conjunto difuso puede definirse de forma general como un conjunto con límites difusos. Sea X el *Universo del discurso*, y sus elementos se denotan como x. En la teoría clásica de conjuntos *crisp* se define un conjunto C se define sobre X mediante la *función característica* de C como f_C.

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & cuando \;\; x \in C \\ 0 & cuando \;\; x \notin C \end{cases}$$

Este conjunto mapea el universo X en un conjunto de dos elementos, donde la función $f_C(x)$ es 1 si el elemento x pertenece al conjunto C y 0 si el elemento x no pertenece al conjunto C.

Si generalizamos esta función para que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular y así indicar el grado de pertenencia de los elementos a ese conjunto, tendremos una **función de pertenencia** de un determinado conjunto difuso. La función de pertenencia μ_A por la que se define un conjunto difuso A, sería:

$$\mu_A = X \rightarrow [0, 1]$$

Donde $\mu_A(x) = 1$ si x está totalmente en A, $\mu_A(x) = 0$ si x no está en A y $0 < \mu_A(x) < 1$ si x está parcialmente en A. Este valor entre 0 y 1 representa el *grado de pertenencia* (también llamado *valor de pertenencia* de un elemento x a un conjunto A.

Así, el intervalo de la ecuación anterior es de números reales e incluye los extremos. Aunque $[0, 1]$ es el rango de valores más utilizado para representar funciones de pertenencia, cualquier conjunto arbitrario con alguna ordenación total o parcial podría ser utilizado.

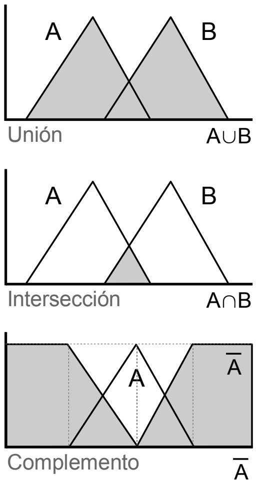

Figura 2.2: Descripción gráfica de operaciones *estándar* con conjuntos difusos.

2.1.2. Operaciones de Conjuntos Difusos

Las tres operaciones básicas que se definen sobre conjuntos crisp (complemento, unión e intersección), pueden generalizarse de varias formas en conjuntos difusos. No obstante, existe una generalización particular que tiene especial importancia. Cuando se restringe el rango de pertenencia al conjunto $[0, 1]$, estas operaciones *"estándar"* sobre conjuntos difusos se comportan de igual modo que las operaciones sobre conjuntos crisp. Dichas operaciones se definen del siguiente modo (ver Figura 2.2):

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \perp[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$
$$\mu_{A\cup B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Unión

La forma generalizada de la unión es la T-conorma. Podemos definirla con la siguiente función:

$$\perp : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$
$$\mu_{A\cup B}(x) = \perp[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Para que una función se pueda considerar como una unión difusa, debe satisfacer los siguientes axiomas $\forall a, b, c \in [0, 1]$:

U1) Elemento Neutro: $\perp(a, 0) = a$

U2) Conmutatividad: $\perp(a, b) = \perp(b, a)$

U3) Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $\perp(a, b) = \perp(c, d)$

U4) Asociatividad: $\perp(\perp(a, b), c) = \perp(a, \perp(b, c))$

Algunas T-conormas ampliamente utilizadas son:

- Máximo: $\perp(a,b) = max(a,b)$
- Producto: $\perp(a,b) = (a+b) - (a \times b)$
- Suma limitada (o de Lukasiewick): $\perp(a,b) = min(a+b,1)$

Intersección

La forma generalizada de la intersección se denomina T-norma. Es una función de la forma:

$$T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$
$$\mu_{A \cap B}(x) = T\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

Una T-norma satisface los siguientes axiomas $\forall a,b,c \in [0,1]$

I1) Elemento unidad: $T(a,1) = a$

I2) Conmutatividad: $T(a,b) = T(b,a)$

I3) Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $T(a,b) = T(c,d)$

I4) Asociatividad: $T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$

Algunas T-normas ampliamente utilizadas son:

- Mínimo: $T(a,b) = min(a,b)$
- Producto algebraico: $T(a,b) = ab$
- Diferencia limitada (o de Lukasiewick): $T(a,b) = max(0, a+b-1)$

Complemento

El complemento $\overline{A}$ de un conjunto difuso A, se denota por cA; está definido por una función del tipo $\mathrm{c} : [0,1] \to [0,1]$. Tiene que satisfacer los siguientes axiomas:

C1) Condiciones límite o frontera: $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$.

C2) Monotonicidad: $\forall a,b \in [0,1]$ si $a < b$ entonces $c(a) \geq c(b)$.

C3) c es una función contínua.

C4) c es involutiva $\forall a \in [0,1]$ tenemos $c(c(a)) = a$.

Al igual que sucedía con los operadores de unión y de intersección, también para el complemento existen gran variedad de clases. Uno de los más utilizados, además del complemento clásico ($\mu_{\overline{A}}(x) = c(a) = 1 - a$), es el λ-complemento de Sugeno, que viene definido por la siguiente expresión:

$$\mu_{\overline{A^\lambda}}(x) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda\mu_A(x)} \quad con \;\; \lambda \in (-1, \infty)$$

Como se puede observar, si $\lambda = 0$, la función se comporta como el complemento clásico. Además, para cada valor de λ, obtenemos una expresión particular para el complemento. Otro tipo de complemento borroso muy utilizado es el de Yager, que se define con la siguiente expresión:

$$\mu_{\overline{A^w}}(x) = (1 - \mu_A(x)^w)^{1/w} \quad con \;\; w \in (0, \infty)$$

Al igual que con el complemento de Sugeno, cambiando el valor de w obtenemos distintos tipos de complemento. Si $w = 1$ tenemos el complemento clásico.

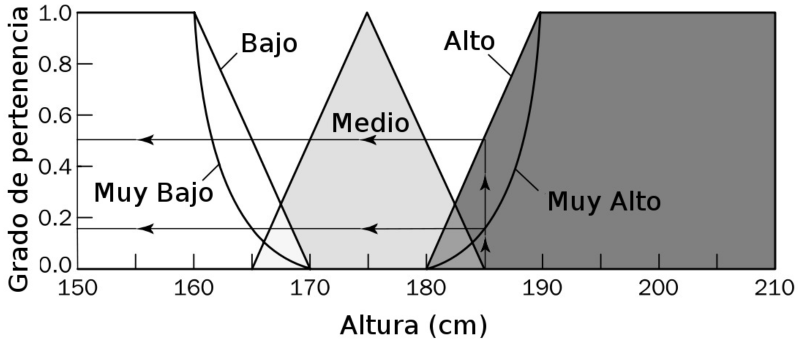

Figura 2.3: Uso de el modificador *muy* en los conjuntos *bajo* y *alto*.

2.1.3. Propiedades

Los conjuntos Crisp y los difusos tienen las mismas propiedades (en realidad los conjuntos crisp pueden verse como un subconjunto de los conjuntos difusos).

- **Conmutativa**: $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Distributiva**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Idempotencia**: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
- **Involución**: $\neg(\neg A) = A$
- **Transitiva**: $If (A \subset B) \cap (B \subset C) then A \subset C$ [1]
- **Leyes de Morgan**: $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ y $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$

Empleando estas operaciones, propiedades y modificadores se pueden obtener gran variedad de expresiones. Por ejemplo, siendo A el conjunto *alto* y B *bajo*, podemos derivar el conjunto C como *no muy alto y no muy bajo* como $\mu_C(x) = [1 - \mu_a(x)^2] \cap [1 - \mu_B(x)^2]$.

2.1.4. Representación de conjuntos difusos

Los conjuntos *crisp* son útiles pero presentan problemas en muchas situaciones. Examinando el *Universo del discurso* de la altura, tendríamos la representación gráfica de la Figura 2.3. Para definir un conjunto difuso hay que definir su *función de pertenencia*. Un método habitual es preguntar a un experto sobre el dominio del problema y representarlo mediante diferentes funciones (típicamente triangulares y trapezoidales). También se pueden utilizar, como veremos más adelante, funciones curvas o la función singleton.

Para representar un conjunto difuso continuo en un ordenador necesitamos expresar esa función de pertenencia y mapear los elementos del conjunto con su grado de pertenencia. Aunque puede usarse a priori cualquier tipo de función, en la práctica se emplean *funciones lineales* con una descripción de su **vector de ajuste**, como:

hombre-medio = $(0/165, 1/175, 0/185)$

[1] Ejemplo de Transitividad: *IF (extremadamente alto $\subset$ muy alto) AND (muy alto $\subset$ alto) THEN (extremadamente alto $\subset$ alto)*

Esta representación se corresponde con el conjunto difuso *Medio* de la Figura 2.3, donde para la altura 165 se asocia el grado de pertenencia 0, a la altura 175 el grado de pertenencia 1, y de nuevo a la altura 185 el grado de pertenencia 0.

2.2. Variables Lingüísticas

Como veremos en el capítulo 3, para representar el conocimiento en razonamiento aproximado tenemos que utilizar variables lingüísticas. Una variable lingüística [4] es aquella cuyos valores son palabras o sentencias en un lenguaje natural o artificial. De esta forma, una variable lingüística sirve para representar cualquier elemento que sea demasiado complejo, o del cual no tengamos una definición concreta; es decir, lo que no podemos describir en términos numéricos.

Así, una variable lingüística está caracterizada por una quíntupla

$$(X, T(X), U, G, M)$$

- X es el nombre de la variable.
- $T(X)$ es el conjunto de términos de X; es decir, la colección de sus valores lingüísticos (o etiquetas lingüísticas).
- U es el universo del discurso (o dominio subyacente). Por ejemplo, si la hablamos de temperatura "Cálida" o "Aproximadamente 25º", el dominio subyacente es un dominio numérico (los grados centígrados).
- G es una gramática libre de contexto mediante la que se generan los términos en $T(X)$, como podrían ser "muy alto", "no muy bajo", ...
- M es una regla semántica que asocia a cada valor lingüístico de X su significado $M(X)$ ($M(X)$ denota un subconjunto difuso en U).

Los símbolos terminales de las gramáticas incluyen:

- **Términos primarios**: "bajo", "alto", ...
- **Modificadores**: "Muy", "más", "menos", "cerca de", ...
- **Conectores lógicos**: Normalmente NOT, AND y OR.

Normalmente se definen los conjuntos difusos de los términos primarios y, a partir de éstos, se calculan los conjuntos difusos de los términos compuestos (por ejemplo, con "muy" y "alto" construimos el término compuesto "muy alto"). Una etiqueta lingüística se forma como una sucesión de los símbolos terminales de la gramática: "Muy alto, no muy bajo...".

Un uso habitual de las variables lingüísticas es en reglas difusas. Ejemplo: *IF duracion-examen IS larga THEN probabilidad-aprobar IS small*. Por ejemplo, la variable lingüística *velocidad* podrías incluir conjuntos difusos como *muy lento, lento, medio, rápido, muy-rápido*. Naturalmente cada uno de estos conjuntos representan un valor lingüístico que puede tomar la variable.

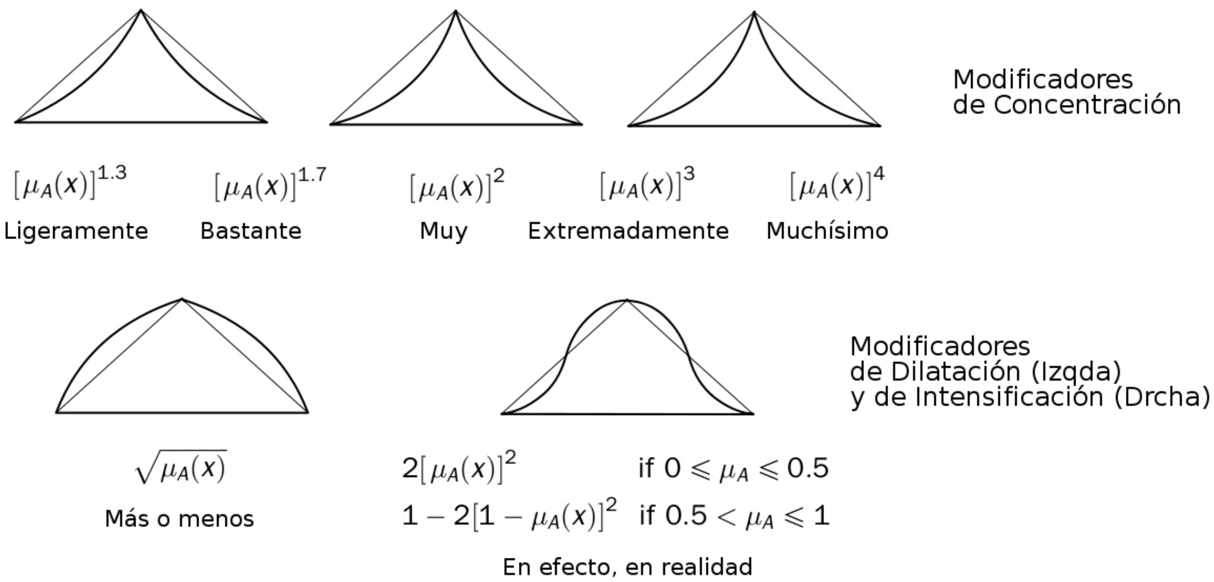

Figura 2.4: Algunos modificadores y su representación gráfica y matemática.

2.2.1. Modificadores

Una variable lingüística puede emplear modificadores para cambiar la forma de los conjuntos difusos. Estos modificadores pueden asociarse a adverbios como “muy”, “ligeramente”, “un poco”, etc... Estos modificadores pueden aplicarse a oraciones completas, verbos, adjetivos, etc.

La figura 2.3 muestra un ejemplo de uso de modificadores (en este caso el modificador *muy*). En el ejemplo de esta figura, Carlos, un elemento del conjunto “alto” (con un grado de pertenencia de 0.5) es también miembro del conjunto de los “muy altos” (pero con un grado de pertenencia de 0.15, lo cual es razonable).

¿Cómo se implementan estos modificadores? En la práctica, podemos distinguir tres tipos de modificadores; de *concentración*, de *dilatación* y de *intensificación*. En la figura 2.4 se representan algunos de los más empleados. Por ejemplo, si Pedro tiene un valor de pertenencia de 0.86 al conjunto de los *altos*, tendrá un valor de $\sqrt{\mu_A(x)} = 0{,}92$ al conjunto de los *más o menos altos*.

Capítulo 3

Razonamiento Aproximado

△ *A principios de los 80, Zadeh introduce el concepto de Razonamiento Aproximado y otros componentes que acabarían formando el cuerpo de la lógica difusa. Así propone la utilización de los conjuntos difusos para el manejo cuantitativo de conceptos cualitativos. En este capítulo veremos los fundamentos del razonamiento aproximado empleando lógica difusa.*

3.1. Razonamiento Aproximado

MEDIANTE el uso de conjuntos difusos es posible dotar de significado matemático a proposiciones como *"este coche es pequeño"*, *"Pedro es muy alto"* o *"el crecimiento es lento"* utilizando los modificadores lingüísticos (muy, poco, demasiado, algo, extremadamente, etc.) para adaptar los calificativos a lo que se quiere decir. Así para la representación y utilización del conocimiento impreciso, como hemos visto en la sección 2.2, aparece el concepto de variable lingüística [4].

Muchas veces, la programación clásica no es suficiente para que un sistema realice funciones complejas. Cuando un sistema no ha sido programado explícitamente para realizar una función y se le pide que la realice, el sistema tiene que razonar. Por ejemplo, si el sistema conoce los siguientes hechos: *"Estirada es una jirafa"*, *"Las jirafas son mamíferos"* y le formulamos la pregunta: *"¿Es Estirada un mamífero?"*, el sistema debe razonar para dar una respuesta. Cuando el número de hechos y reglas aumenta, el sistema tiene que poder verificar gran cantidad de hechos que surgen en las etapas de razonamiento. A continuación estudiaremos el concepto de *Regla Difusa* empleada en *Razonamiento Aproximado*.

3.1.1. Reglas Difusas

El razonamiento aproximado se utiliza para representar y razonar con conocimiento expresado en forma de primitivas atómicas, enunciadas en lenguaje natural. Por ejemplo "*La velocidad tiene un valor positivo grande*".

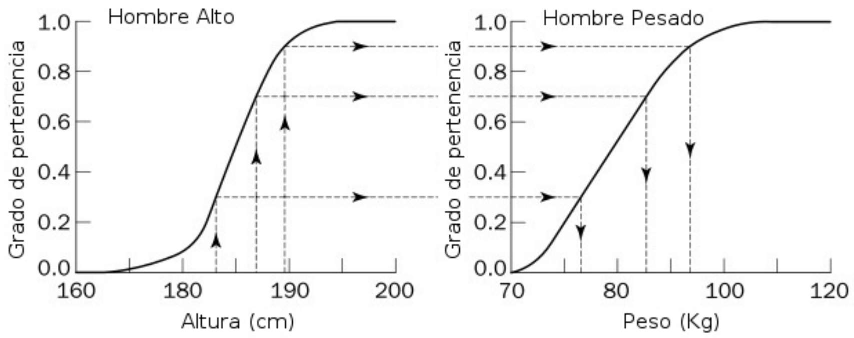

Figura 3.1: Ejemplo de inferencia de selección monotónica.

La transformación de esta expresión en lenguaje natural, en términos de variables lingüísticas se realiza como se indica a continuación:

1. Se selecciona un símbolo V para representar la variable física "*velocidad*".
2. Se elige un símbolo PG para representar el valor particular "*positivo grande*" de la variable física "*velocidad*".
3. La expresión en lenguaje natural pasa a ser: V es PG

A este tipo de expresión se le denomina **proposición atómica difusa**. La interpretación de la expresión atómica anterior viene dada por la pertenencia de la variable física velocidad V al conjunto difuso PG, es decir $\mu_{PG}(\nu)$, donde ν denota un valor arbitrario del universo del discurso U. Esta interpretación determina el grado en que la expresión es satisfecha dado un valor específico de la variable V.

Usando este concepto de proposición difusa y conectores lingüísticos con "y", "o" y "no" es posible componer proposiciones difusas más complejas "*A es X y B es Y*", "*A es no X*", etc... El significado de estas proposiciones difusas compuestas viene dado por la interpretación de las conectores lingüísticos.

Esta interpretación se hace en base a las operaciones de intersección, unión y complemento que, como se vio anteriormente, se realiza mediante T-normas, T-conormas y el operador complemento elegido. Hay que tener en cuenta que, el grado de satisfacción de una expresión constituye un conjunto difuso y, por tanto, estos conectores deben interpretarse mediante operadores de conjuntos difusos.

Una **regla difusa** (*regla de producción difusa if-then*) es expresada simbólicamente como:

IF <proposición difusa> THEN <proposición difusa>

Donde <proposición difusa> puede ser una proposición difusa atómica o compuesta. Podemos definir una proposición sencilla de este tipo mediante:

p: IF X es A THEN Y es B

El antecedente y consecuente de una regla puede tener múltiples partes. Veremos a continuación cómo se trabaja con estos formatos de reglas.

En los sistemas de reglas clásicos, si el antecedente es cierto, el consecuente es también cierto. En sistemas fuzzy donde el antecedente es difuso, todas las reglas se ejecutan parcialmente, y el consecuente es cierto en cierto grado (si el antecedente es cierto con cierto grado de pertenencia, el consecuente es cierto también el cierto grado).

Ver ejemplo de la regla "*IF altura IS alto THEN peso IS pesado.* El valor de la salida (grado de pertenencia) puede ser estimado directamente empleando un método de inferencia de selección monotónica. En la figura se pueden ver cómo varios valores de peso pueden ser derivados de diferentes valores de alturas.

3.2. Inferencia Difusa

La inferencia difusa puede definirse como el proceso de obtener un valor de salida para un valor de entrada empleando la teoría de conjuntos difusos. A continuación veremos dos tipos de inferencia: el modelo de Mamdani y el de TSK (Takagi, Sugeno y Kang).

3.2.1. Inferencia de Mamdani

Es posiblemente el método más ampliamente utilizado, propuesto por Ebrahim Mamdani en 1975. El proceso se realiza en cuatro pasos:

1. Fuzificación de las variables de entrada.
2. Evaluación de las reglas.
3. Agregación de las salidas de las reglas.
4. Defuzificación.

Veremos a continuación un ejemplo de uso empleando tres reglas. Estas reglas usan como variables lingüísticas *x* (financiación-del-proyecto), *y* (plantilla-del-proyecto) y *z* (riesgo). Los conjuntos definidos sobre el dominio de X son $A1, A2, A3$ (inadecuado, marginal, adecuado), sobre el dominio de Y $B1, B2$ (pequeña, grande) y sobre el universo del discurso de Z son $C1, C2yC3$ (bajo, normal y alto). Reglas:

- **R1:** IF x is A3 OR y is B1 THEN z is C1
- **R2:** If x is A2 AND y is B2 THEN z is C2
- **R3:** IF x is A1 THEN z is C3

Veamos a continuación las etapas de inferencia (ver Figura 3.3):

1. **Fuzificación**. El primer paso consiste en tomar los valores crisp de las entradas (*financiacion-del-proyecto* y *plantilla-del-proyecto*) y determinar el grado de pertenencia de estas entradas a los conjuntos difusos asociados.

   El valor crisp naturalmente estará limitado en el universo del discurso de la variable. En nuestro caso, x e y estarán limitadas al universo del discurso de X e Y respectivamente. En nuestro caso vamos a suponer que un experto asigna a x un valor del 35 % (financiacion-proyecto) y a y un valor de 60 % (plantilla-proyecto).

   Como se puede ver estos valores Crisp se corresponden con los valores de pertenecia de A1 y A2 (en el caso de x) con 0.5 y 0.2, y con los valores de B1 y B2 (en el caso de y) con 0.1 y 0.7 respectivamente. De este modo cada entrada se fuzzifica sobre *todas* las funciones de pertenencia utilizadas en la reglas difusas.

2. **Evaluación de Reglas** Tomamos las entradas anteriores y se aplican a los antecedentes de las reglas difusas. Si una regla tiene múltiples antecedentes, se utiliza el operador AND u OR para obtener un único número que represente el resultado de la

evaluación. Este número (el valor de verdad) se aplica al consecuente.

Para evaluar la disjución (operador OR) habitualmente se emplea la T-Conorma estándar (máximo), definida como hemos visto como: $\mu_{A\cup B}(x) = \text{máx}\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$. De igual forma, para el AND se usa habitualmente la T-Norma estándar del mínimo.

Finalmente el resultado de la evaluación del antecedente se alpica al consecuente, aplicando un **recorte** o **escalado** según el valor de verdad del antecedente. El método más comunmente utilizado es el **recorte** (clipping) que corta el consecuente con el valor de verdad del antecedente. El **escalado** proporciona un valor más preciso, preservando la forma original del conjunto difuso. Se obtiene multiplicando todos los valores por el valor de verdad del antecedente (ver figura 3.2).

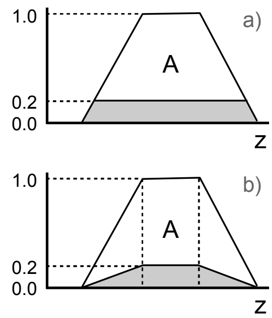

Figura 3.2: Conjunto recortado (a) y escalado (b).

3. **Agregación de las salidas** La agregación es el proceso de unificación de las salidas de todas las reglas; es decir, se combinan las funciones de pertenencia de todos los consecuentes previamente recortados o escalados, combinando para obtener un único conjunto difuso por cada variable de salida.

4. **Defuzificación** El resultado final habitualmente es necesario expresarlo mediante un valor crisp. En esta etapa se toma como entrada el conjunto difuso anteriormente obtenido para dar un valor de salida. Existen varios métodos de defuzificación, pero probablemente el más ampliamente usado es el **centroide**; que calcula el punto donde una línea vertical divide el conjunto en dos areas con igual masa.

$$Centroide = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)}$$

3.2.2. Inferencia TSK

Como hemos visto, el modelo de inferencia de Mamdani require algún tipo de método para la defuzzificación. En general, este método no es muy eficiente desde el punto de vista computacional. Podemos disminuir el tiempo de inferencia empleando una función matemática en el consecuente, de forma que el formato general de regla en inferencia TSK es:

p: IF x es A AND y es B THEN z es $f(x, y)$

Este tipo de método proporciona mayor eficiencia, pero no presentan un marco tan natural para la representación del conocimiento humano. Un tipo habitual de representación del consecuente es un *singleton* (punta discreta), que toma valor uno en un valor puntual del universo del discurso y cero en cualquier otro punto.

Empleando este tipo de aproximación (ampliamente utilizada), la inferencia TSK y de Mamdani son muy parecidas (ver Figura 3.4), tomando las reglas el siguiente formato:

p: IF x es A AND y es B THEN z es k

Siendo k un valor constante para el singleton. La salida crisp en este caso se obtiene mediante una sencilla agregación (media de pesos W_A) de estos singletones.

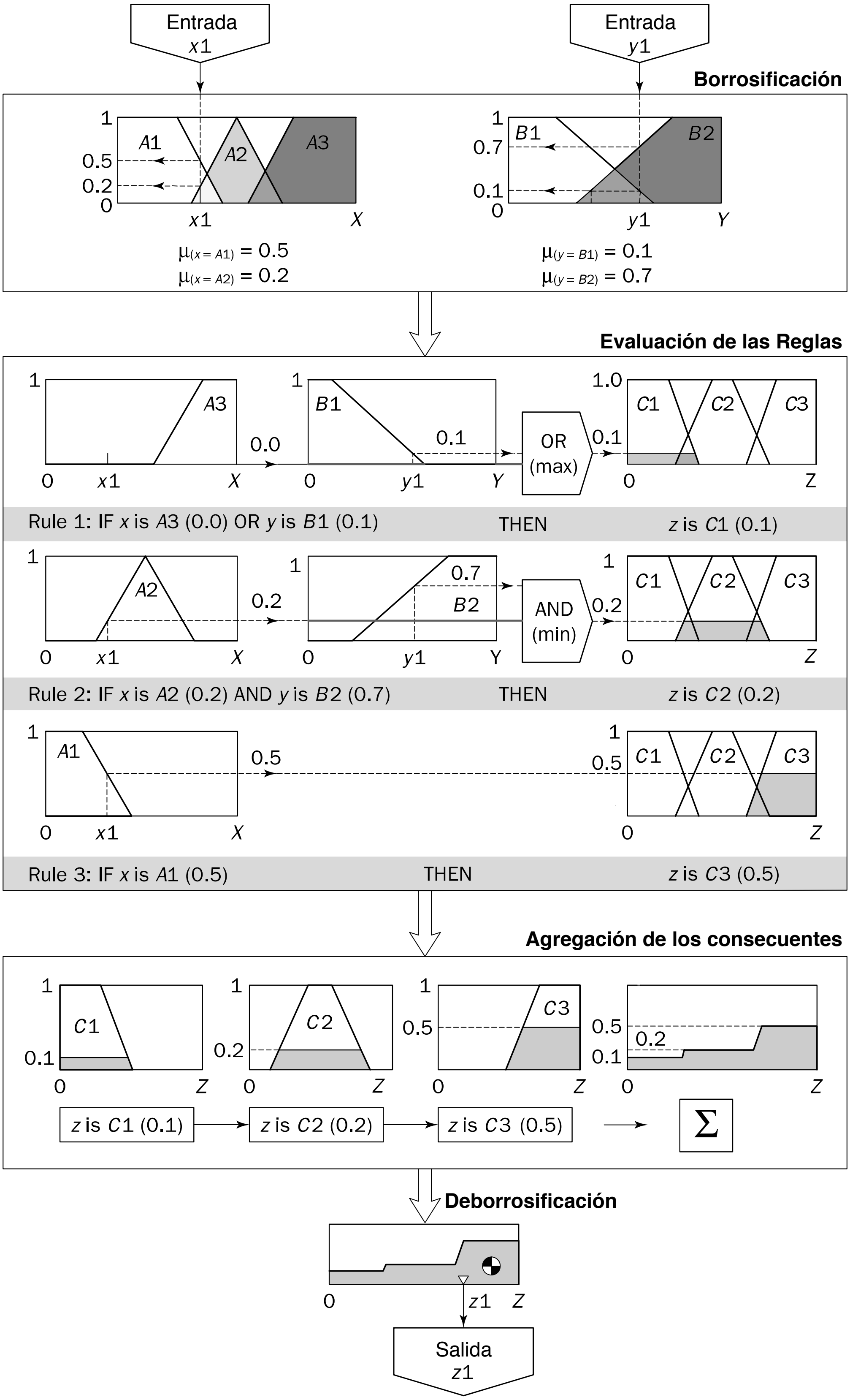

Figura 3.3: Estructura básica de inferencia de Mamdani.

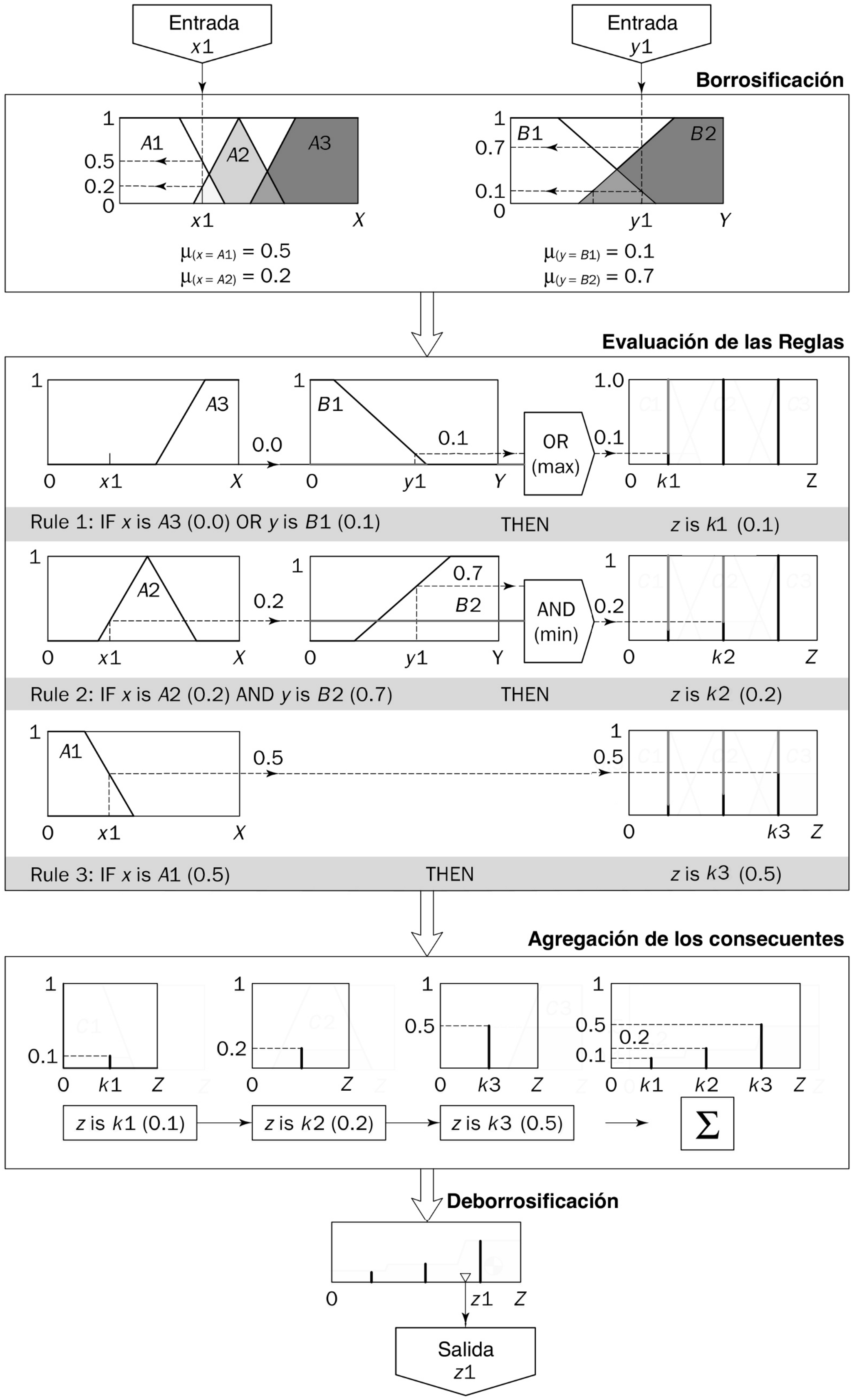

Figura 3.4: Estructura básica de inferencia de Takagi, Sugeno y Kang.

$$W_A = \frac{\sum(\mu(k_i) \times k_i)}{\sum \mu(k_i)}$$

En general el método de Mamdani se utiliza más ampliamente porque apareció antes, y porque se presta más a la representación de conocimiento experto. Nos permite describir el conocimiento experto de una forma intuitiva. El principal inconveniente es su alto coste computacional, por lo que para aplicaciones de control y problemas de optimización se emplea más frecuentemente el método de inferencia TSK.

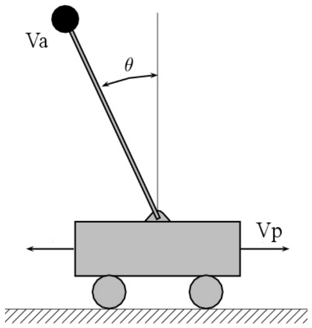

Figura 3.5: Esquema ilustrativo del péndulo invertido.

3.3. Ejercicios

3.3.1. Control del Péndulo Invertido

El problema es mantener equilibrada una barra rígida sobre una plataforma móvil que puede desplazarse en dos direcciones; izquierda y derecha. Queremos diseñar un controlador difuso que tomará como entradas el **ángulo** y la **velocidad angular** y dará como salida la **velocidad de la plataforma**.

El primer paso es definir las etiquetas de la variable lingüística **velocidad** de la plataforma. En este caso definiremos 5 etiquetas asociadas a sus respectivos conjuntos difusos como **NG** (Negativa Grande) **NP** (Nevativa Pequeña) **Z** (Cero) **PP** (Positiva Pequeño) y **PG** (Positiva Grande). La Velocidad de la plataforma se define con el siguiente vector de ajuste:

Velocidad NG = $(1/-3, 1/-2, 0/-1)$
Velocidad NP = $(0/-2, 1/-1, 0/0)$
Velocidad Z = $(0/-1, 1/0, 0/1)$
Velocidad PP = $(0/0, 1/1, 0/2)$
Velocidad PG = $(0/1, 1/2, 1/3)$

Empleando la misma notación se definen las funciones de pertenencia para el **ángulo** y la **velocidad angular**, que tienen asociados los siguientes vectores de ajuste:

Ángulo NG = $(1/-45, 1/-30, 0/-15)$
Ángulo NP = $(0/-30, 1/-15, 0/0)$
Ángulo Z = $(0/-15, 1/0, 0/15)$
Ángulo PP = $(0/0, 1/15, 0/30)$
Ángulo PG = $(0/15, 1/30, 1/45)$

Velocidad Angular NG = $(1/-1{,}5, 1/-1, 0/-0{,}5)$
Velocidad Angular NP = $(0/-1, 1/-0{,}5, 0/0)$
Velocidad Angular Z = $(0/-0{,}5, 1/0, 0/0{,}5)$
Velocidad Angular PP = $(0/0, 1/0{,}5, 0/1)$
Velocidad Angular PG = $(0/0{,}5, 1/1, 1/1{,}5)$

La base de reglas del controlador se puede representar en una tabla llamada *Fyzzy Associative Memory* (FAM) como:

VelAng/Ang	**NG**	**NP**	**Z**	**PP**	**PG**
NG			NG		
NP			NP	Z	
Z	NG	NP	Z	PP	PG
PP		Z	PP[2]		
PG			PG		

Por ejemplo, la regla ^{2} anterior se interpretaría como:
Si (*Ángulo* es Zero) y (*Velocidad Angular* es Positiva Pequeña) Entonces (*Velocidad de Plataforma* será Positiva Pequeña).

Es decir, aunque el péndulo está en la posición correcta, se está moviendo lentamente en sentido positivo, por lo que se hace necesario mover la plataforma lentamente en la misma dirección para compensar este movimiento.

Suponiendo que tenemos los siguientes valores de entrada **Ángulo=3.75**, **Velocidad Angular=-0.3**. ¿Qué velocidad se el aplicaría a la plataforma empleando inferencia de Mamdani y el centroide como método de defuzzificación?

3.3.2. Propina al mesonero

El conocimiento experto de un comensal de un restaurante se modela mediante un sistema de reglas difusos. El sistema cuenta con dos variables de entrada **Servicio** (Calidad del Servicio, que se evalúa de 0 a 10), y **Comida** (Calidad de la Comida, que se evalúa igualmente de 0 a 10). El porcentaje de propina se modela con la variable **Propina** (definida entre 5 % y 25 % del precio total).

A la variable de entrada *Servicio* le asociaremos tres conjuntos difusos asociados a las etiquetas lingüísticas *Pobre*, *Bueno* y *Excelente*. Estos conjuntos se definirán empleando una función *Gausiana Simple*[1], con la siguiente especificación:

$$\textit{Pobre} = m = 0, \sigma = 1{,}5$$
$$\textit{Bueno} = m = 5, \sigma = 1{,}5$$
$$\textit{Excelente} = m = 10, \sigma = 1{,}5$$

La calidad de la comida *Comida* tendrá asociada dos conjuntos difusos, con las etiquetas *Rancia* y *Deliciosa*. Estos conjuntos se definirán mediante funciones trapezoidales, con la siguiente especificación según sus vectores de ajuste:

$$\textit{Rancia} = (1/0, 1/1, 0/3)$$
$$\textit{Deliciosa} = (0/7, 1/9, 1/10)$$

De forma análoga, la *Propina* estará definida sobre tres conjuntos difusos con las etiquetas *Tacaña*, *Promedio* y *Generosa*. Estos conjuntos se definirán mediante funciones triangulares, con la siguiente especificación según sus vectores de ajuste:

$$\textit{Tacaña} = (0/0, 1/5, 0/10)$$
$$\textit{Promedio} = (0/5, 1/15, 0/25)$$
$$\textit{Generosa} = (0/20, 1/25, 0/30)$$

El sistema de reglas que modela el conocimiento experto del comensal está basado en tres reglas, con la siguiente especificación:

$$R_1 : \text{Si } \textit{servicio} \text{ es } \textit{pobre} \vee \textit{comida} \text{ es } \textit{rancia} \rightarrow \textit{propina} \text{ es } \textit{tacaña}$$
$$R_2 : \text{Si } \textit{servicio} \text{ es } \textit{bueno} \rightarrow \textit{propina} \text{ es } \textit{promedio}$$
$$R_3 : \text{Si } \textit{serv.} \text{ es } \textit{excel.} \vee \textit{comida} \text{ es } \textit{deliciosa} \rightarrow \textit{propina} \text{ es } \textit{generosa}$$

Dada una calificación de *Servicio=3* y *Comida=8*, calcule la propina para el camarero empleando:

- a) Un modelo de Inferencia de Mamdani, empleando el centroide como mecanismo de deborrosificación.
- b) Un modelo de Inferencia TSK, empleando singletones definidos en el valor máximo de cada conjunto de salida y la media de los pesos como mecanismo de agregación de los consecuentes.

---

[1]Recordemos que la distribución gausiana simple se calcula como $e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, siendo m la media y σ la varianza.

Bibliografía

[1] J.P. Aurrand-Lions, L. Fournier, P. Jarri, et al. Application of fuzzy control for ISIS vehicule braking. In *Proceedings of Fuzzy and Neuronal Systems, and Vehicule applications'91*, 1991.

[2] L.A. Zadeh. Fuzzy set. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.

[3] L.A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex system. *IEEE Transaction on System Man and Cybernetics*, 1:28–44, 1973.

[4] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. part i, ii, iii. *Information Science*, 8-9:199–249, 301–357, 43–80, 1975.