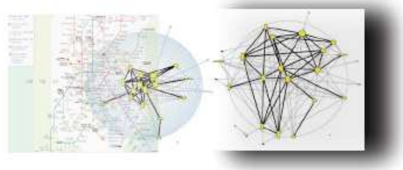
E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos
Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación
Área de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes

MODELOS MATEMÁTICOS
EN SISTEMAS DE TRANSPORTES
Ciudad Real 18 de octubre de 2007



LOCALIZACIÓN DE PUNTOS DE AFOROS Y ESTIMACIÓN DE VOLÚMENES DE TRÁFICO UTILIZANDO REDES BAYESIANAS

Santos Sánchez-Cambronero García-Moreno
Edificio Politécnico
Avda Camilo José Cela s/n
13.071 Ciudad Real

Teléfono: 926 25 53 00 ext: 3298
santos.sanchez@uclm.es

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

- Líneas de investigación del Equipo de Transportes de la Escuela de Caminos de Ciudad Real:
  - Nueva formulación de un modelo de elección de rutas basada en distribuciones tipo Weibull
  - Estimación y regeneración de matrices
    - Redes Bayesianas
    - Escaneo de matrículas
  - Localización de aforos de tráfico
    - Observabilidad
    - Redes Bayesianas
    - Escaneo de matrículas

INTRODUCCIÓN

- Líneas de investigación del Equipo de Transportes de la Escuela de Caminos de Ciudad Real:
  - Nueva formulación de elección un modelo de rutas basada en distribuciones tipo Weibull
  - Estimación y regeneración de matrices
    - Redes Bayesianas
    - Escaneo de matrículas
  - Localización de aforos de tráfico
    - Observabilidad
    - Redes Bayesianas
    - Escaneo de matrículas

ÍNDICE GENERAL

REDES BAYESIANAS

- Herramienta para predecir flujos de tráfico

- Herramienta para localizar puntos de aforo

REDES BAYESIANAS

- Herramienta para predecir flujos de tráfico

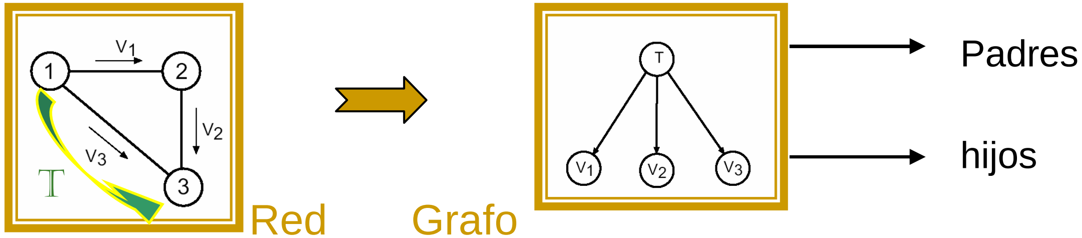
- Herramienta para localizar puntos de aforo

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Definición de Red Bayesiana: par (*G*,*P*)
  - *G*: Grafo acíclico dirigido



Red Grafo

  - *P*: Funciones de probabilidad condicionada

$$P = \{p(x_1 \mid \pi_1), \ldots, p(x_n \mid \pi_n)\} \Longrightarrow p(x) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid \pi_i)$$

Prob. condicionada Prob. conjunta

- Red Bayesiana Gausiana

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-1/2(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\}$$

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Hipotesis
  1. Demanda entre pares (t_i)
     - Variable Normal multivariada $N(\mu_T,\Sigma_T)$
     - Correlación entre la demanda de los pares

$$t_i = k_i U + \eta_i$$

       - *U: nivel de demanda total*
       - k_i: peso relativo de cada par
       - η_i: variabilidad de la demanda
     - Formulación:

$$T = \left(K \quad | \quad I\right)\begin{pmatrix} U \\ -- \\ \eta^T \end{pmatrix} \qquad \Sigma_T = \left(K \quad | \quad I\right)\Sigma_{(U,\eta)}\begin{pmatrix} U \\ -- \\ \eta^T \end{pmatrix} = \sigma_U K K^T + D_\eta$$

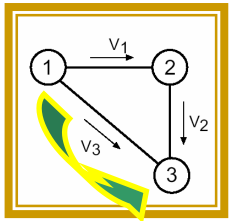
Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Hipotesis

2. Flujo en arcos (v_a)



β_1=0.6

β_2=0.6

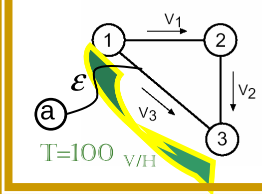
β_3=0.4

$$v_a \mid T \approx N\left(\mu_a + \sum_{i\in\Pi_a}\beta_{ai}(t_i-\mu_{Ti}),\ \psi_a^2\right)$$

$$v_a = \sum_i\left(\sum_k p_{ik}\delta_{ak}^i\right)t_i = \sum_i \beta_{ai}\, t_i$$

$$v_a = \sum_i\beta_{ai}t_i + \sum_i\beta_{ai}\,\mu_{T_i} - \sum_i\beta_{ai}\,\mu_{T_i} = \sum_i\beta_{ai}\,\mu_{T_i} + \sum_i\beta_{ai}(t_i-\mu_{Ti})$$

$$V = \beta T + \varepsilon$$



- V_1=60 veh/h
- V_2=60 veh/h
- V_3=45 veh/h=40+ε

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Hipotesis

2. Flujo en arcos (v_a)

- Variable normal

$$v_a \mid T \approx N\left(\mu_a + \sum_{i \in \Pi_a} \beta_{ai}(t_i - \mu_{Ti}) \,,\, \psi_a^2 \right)$$

- Formulación

$$V = \beta T + \varepsilon$$

- Matriz de medias

$$\begin{pmatrix} T \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & | & 0 \\ - & + & - \\ \beta & | & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ -- \\ \varepsilon \end{pmatrix} \qquad E[(T,V)] = \begin{pmatrix} E(U)K \\ ---------- \\ E(U)\beta K + E(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

- Matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma(T,V) = \begin{pmatrix} I & | & 0 \\ - & + & - \\ \beta & | & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_T & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & D_\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & | & 0 \\ - & + & - \\ \beta & | & I \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \Sigma_T & | & \Sigma_T \beta^T \\ --- & + & -------- \\ \beta \Sigma_T & | & \beta \Sigma_T \beta^T + D_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Actualización del valor de las variables
  - Y y *Z* conjuntos de variables aleatorias con distribución normal multivariada con:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \mu_Z \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YZ} \\ \Sigma_{ZY} & \Sigma_{ZZ} \end{pmatrix}$$

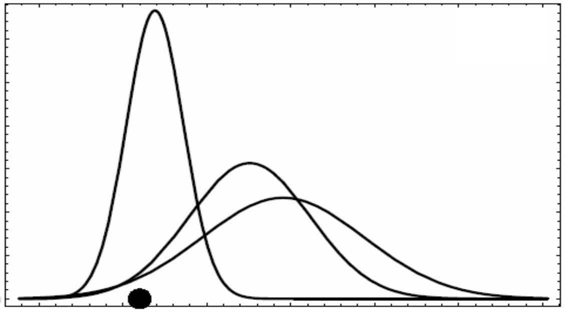
  - Obtención de dato real (evidencia) *Z = z se obtiene:*

$$\mu_{Y|Z=z} = \mu_Y + \Sigma_{YZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}(z - \mu_z)$$

$$\Sigma_{Y|Z=z} = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YZ}\Sigma_{ZZ}^{-1}\Sigma_{ZY}$$

  - Nueva función de densidad conjunta

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_m, v_1, v_2, \ldots, v_n) = f_{N(\mu_{\mathbf{T}}, \mathbf{\Sigma_T})}(t_1, t_2, \ldots, t_m) \prod_{i=1}^{n} f_{N(\mu_a + \sum_{i \in \Pi_a} \beta_{ai}(t_i - \mu_{T_i}), \psi_a^2)}(v_j)$$



Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Formulación BN-ME

$$
\begin{aligned}
\beta_{ai} &= \sum_k p_{ik}\delta^i_{ak} \\
E[\mathbf{T}] &= E[U]\mathbf{K} \\
E[\mathbf{V}] &= E[U]\boldsymbol{\beta}\mathbf{K} + E[\boldsymbol{\varepsilon}] \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{TT}} &= \sigma_U^2\mathbf{K}\mathbf{K}^T + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{TV}} &= \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{TT}}\boldsymbol{\beta}^T \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{VT}} &= \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{TV}} \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{VV}} &= \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{TT}}\boldsymbol{\beta}^T + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
E[\mathbf{Y}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}] &= E[\mathbf{Y}] + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{YZ}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}_{\mathbf{ZZ}}(\mathbf{z} - E[\mathbf{Z}]) \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}} &= \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{YY}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{YZ}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}_{\mathbf{ZZ}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{ZY}} \\
E[\mathbf{Z}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}] &= \mathbf{z} \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}|\mathbf{Z}=\mathbf{z}} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{T} &= E[\,\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{Z}=\mathbf{z}]|_{(\mathbf{Y},\mathbf{Z})=T} \\
\mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} &= \mathrm{Diag}\left(vE[\mathbf{T}]\right) \\
\mathbf{D}_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathrm{Diag}\left(\mathbf{0}\right),
\end{aligned}
$$

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Formulación bi-nivel (opción 1: BN-ME y SUE)

Obtención de las proporciones p_{ik} utilizando un procedimiento de asignación

$$\beta_{ai} = \sum_k p_{ik}\delta^i_{ak}$$

Aforos

Nivel superior: Utilización del método propuesto de las Redes Bayesianas para obtener

$E[(T,V)]$ y $\Sigma(T,V)$:

Nivel inferior Obtención de las nuevas proporciones p_{ik}^*:

$$v_a = \sum_{i\in I} t_i \sum_k p_{ik}\delta^i_{ak} \qquad c^i_k = \sum_{a\in A} h_a(v_a)\delta^i_{ak}$$

$$h_a(v_a) = c_a\left[1+\alpha_a\left(\frac{v_a}{q_a}\right)^{\gamma_a}\right] \qquad p^*_{ik} = \frac{\exp(-\theta c^i_k)}{\sum_j \exp(-\theta c^i_j)}.$$

Criterio de convergencia:

$$\sum_{i,k}(p_{ik}-p^*_{ik})^2 < \xi$$

Actualización

$$p_{ik} = \rho p^*_{ik} + (1-\rho)p_{ik}$$

OK

$E[(T,V)]$

$\Sigma(T,V)$:

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Formulación bi-nivel (opción 2)
  - Alternativa al SUE: modelo de asignación con desagregación del flujo en arcos según su origen y destino
    - Definición:
      - $t_i \longrightarrow t_{ks}$; demanda entre el origen **k** destino **s**
      - Variables desagregadas
        - v_{ijks}; flujo del nodo **i** al **j** que procede de **k** y va a **s**
        - $v_a \longrightarrow w_{ij}$:

$$w_{ij} = \sum_{k,s} v_{ijks}.$$

      - $\beta_{ai} \longrightarrow \beta_{ijks}$; proporción del par **k-s** que circula entre **i** y **j**

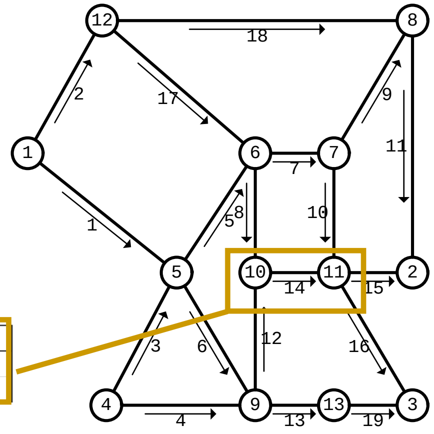
$$\beta_{ijks} = \frac{v_{ijks}}{t_{ks}} \longleftrightarrow \beta_{ai} = \sum_k p_{ik} \delta_{ak}^i$$

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Hipótesis:
  - Equilibrio de Wardrop
  - Minimización de la varianza



Link	Origin-Destination			
	1- 2	1- 3	4- 2	4- 3
10-11	5.0	136.5	248.0	136.5

Red de Nguyen-Dupuis

- Formulación (WMV):

$$\underset{\mathbf{v}}{\text{Minimize}}\, Z = \sum_{\ell_{ij}\in A} \int_0^{c_{ij}\left(\sum_{k,s} v_{ijks}\right)} c_{ij}(v)dv + \frac{\alpha}{m} \sum_{\ell_{ij}\in A} \sum_{k,s} (v_{ijks} - \mu)^2$$

subject to

$$t_{ks}(\delta_{ik} - \delta_{is}) = \sum_{\ell_{ij}\in\mathcal{A}} v_{ijks} - \sum_{\ell_{ji}\in\mathcal{A}} v_{jiks} \quad \forall i; \quad \forall k,s; \quad k \neq s,$$

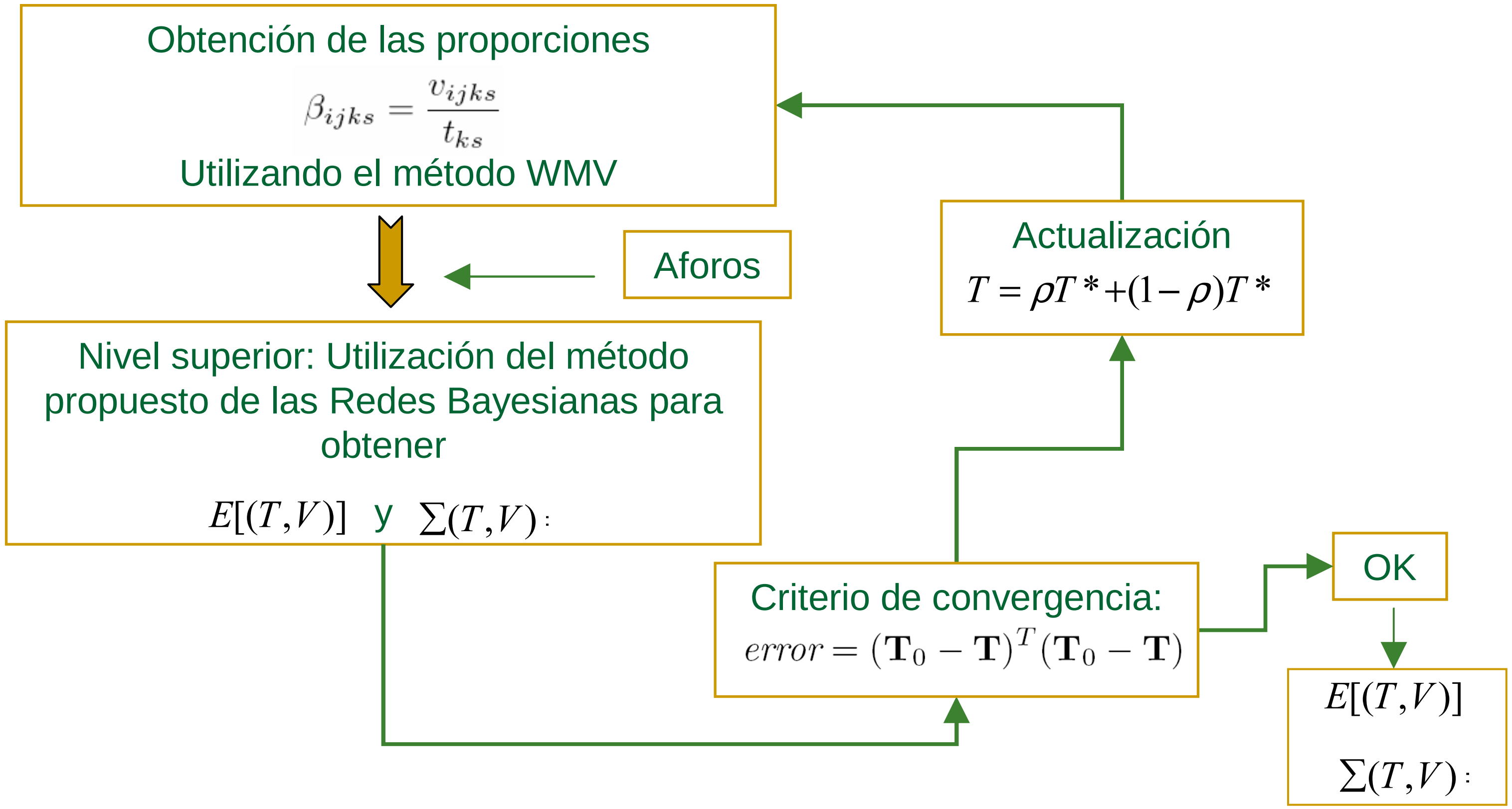
$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{\ell_{ij}\in A} \sum_{k,s} v_{ijks},$$

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Redes Bayesianas como herramienta para predecir flujos de tráfico

- Formulación bi-nivel (opción 2: BN-ME y WMV)



REDES BAYESIANAS

- Herramienta para predecir flujos de tráfico

- Herramienta para localizar puntos de aforo

REDES BAYESIANAS

Localización de puntos de aforo

- Definición:
  - Método de la correlación

Matriz de varianzas-covarianzas → $Corr_{ij} = \dfrac{Cov(X_i X_j)}{\sqrt{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}}}$ → Matriz de correlación →

	Iteration 4
	OD-pair
Link	4-3
4-9	0.306
9-13	**0.989**
13-3	0.657

  - Formulación

Matriz de varianzas-covarinazas → Matriz de correlación → Selección de la variable a observar → Actualización de la matriz de varianzas-covarianzas → Chequeo del valor de las varianzas restantes → Matriz de varianzas-covarinazas

Tolerancia

$$\mu_{Y|Z=z} = \mu_Y + \Sigma_{YZ}\,\Sigma_{ZZ}^{-1}(z-\mu_z)$$

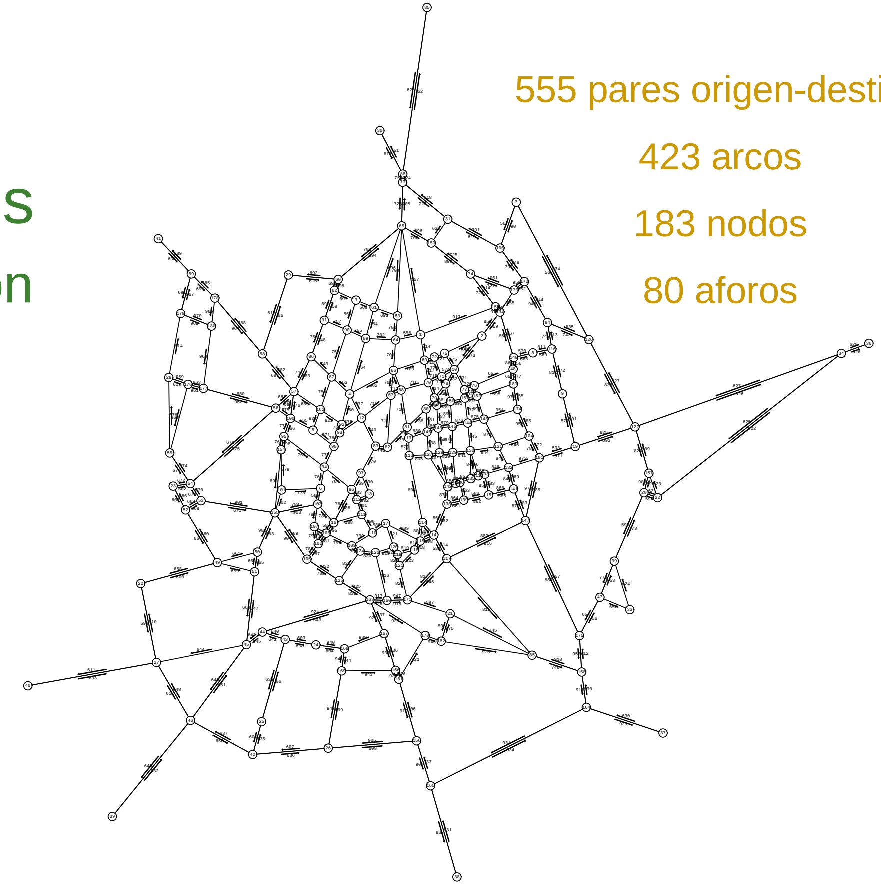
$$\Sigma_{Y|Z=z} = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YZ}\,\Sigma_{ZZ}^{-1}\,\Sigma_{ZY}$$

Santos Sánchez-Cambronero

REDES BAYESIANAS

Recapitulación

- Definición:
  - Localización de aforos
    - Método de la correlación
  - Modelo bi-nivel
    - ME: Red Bayesiana
    - Asignación: WMV



555 pares origen-destino

423 arcos

183 nodos

80 aforos

- Hipótesis

- Metodología

Santos Sánchez-Cambronero

ÍNDICE GENERAL

Santos Sánchez-Cambronero

CONCLUSIONES

- Las Redes Bayesianas (BN-ME):
  - Son una buena herramienta para modelar la demanda.
  - Además de la predicción de variables, ofrece sus incertidumbres.
  - Permiten conocer la relación entre variables.
  - Permiten determinar la ubicación optima de aforos.
- El modelo de asignación propuesto (WMV):
  - Desagrega los flujos en arcos por orígenes y destinos.
  - Ofrece más información que otros modelos.
  - No necesita enumerar rutas.

CONCLUSIONES

- La aplicación bi-nivel (BN-ME y WMV):
  - Resuelve de forma eficiente el problema de estimación de matrices y asignación de la demanda a partir de aforos de tráfico.
  - Ha sido probada con éxito en redes de tamaño pequeño y mediano (Nguyen-Dupuis, Sioux Falls y Ciudad Real).

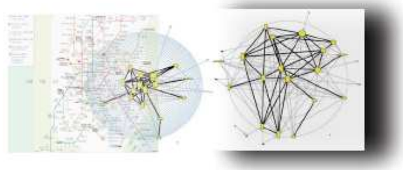
REFERENCIAS

- Castillo, E., Menéndez, J. M., and Sánchez-Cambronero, S. (2008). Traffic estimation and optimal counting location without path enumeration using Bayesian networks. Special Issue on Traffic Computational Models. Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering, 23, 2.

- Castillo, E., Menéndez, J. M., and Sánchez-Cambronero, S. (2008). Predicting traffic flow using Bayesian Networks. Transportation Research B (In Press)

E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos
Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación
Área de Ingeniería e Infraestructura de los Transportes

MODELOS MATEMÁTICOS
EN SISTEMAS DE TRANSPORTES
Ciudad Real 18 de octubre de 2007



LOCALIZACIÓN DE AFOROS Y ESTIMACIÓN DE VOLÚMENES DE TRÁFICO UTILIZANDO REDES BAYESIANAS

Santos Sánchez-Cambronero García-Moreno
Edificio Politécnico
Avda Camilo José Cela s/n
13.071 Ciudad Real

Teléfono: 926 25 53 00 ext: 3298
santos.sanchez@uclm.es