

Conjuntos borrosos^{*}, por E. Renedo y S. Guadarrama

L. A. Zadeh

*Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory,
University of California, Berkeley, California.*

Resumen

Un conjunto borroso es una clase de objetos con un grado de pertenencia continuo. Dicho conjunto se caracteriza por una función de pertenencia (función característica) que asigna a cada objeto un grado de pertenencia evaluable entre cero y uno. Las nociones de inclusión, unión, intersección, complemento, relación, convexidad, etc. se extienden a estos conjuntos, a la vez que se establecen diversas propiedades de estas nociones en el contexto de los conjuntos borrosos. En particular, se demuestra un teorema de separación para conjuntos borrosos convexos sin exigir que sean disjuntos.

1. Introducción

La mayoría de las veces, las clases de objetos que se encuentran en el mundo real no disponen de un criterio de pertenencia definido con precisión. Por ejemplo, la clase 'animales' incluye entre sus miembros perros, caballos, pájaros, etc. y excluye claramente objetos tales como rocas, fluidos, plantas, etc. Sin embargo, objetos tales como estrella de mar, bacteria, etc. tienen un status ambiguo en relación con dicha clase. Esta misma ambigüedad aparece en el caso del número 10 en relación a la "clase" de los números reales mucho mayores que 1.

Ciertamente, la "clase de todos los números reales mucho más grandes que 1", o "la clase de la mujeres hermosas", o "la clase de los hombres altos", no constituyen clases o conjuntos en sentido matemático usual. Sin embargo, es un hecho que tales "clases" definidas de un modo impreciso juegan un papel importante en el razonamiento, en especial en dominios de reconocimiento de patrones, comunicación de información, y abstracción.

Este trabajo tiene el objetivo de explorar de forma preliminar algunas de las propiedades e implicaciones de un concepto útil cuando nos ocupamos de las "clases" citadas. El concepto en cuestión es el de *conjunto borroso*¹, esto es, una "clase" con un grado de pertenencia

^{*}Traducido del artículo "Fuzzy Sets", publicado en 1965, *Information and Control*, 8, 338-353.

¹Una aplicación de este concepto a la formulación de un tipo de problemas en reconocimiento de patrones se describe en RAND Memorandum RM-4307-PR, "Abstraction and Pattern Classification", por R. Bellman, R. Kalaba y L. A. Zadeh, Octubre, 1964.

continuo. Como veremos más adelante, la idea de conjunto borroso nos da un conveniente punto de partida para la construcción de un marco de referencia conceptual que parangona en muchos aspectos al utilizado en los conjuntos ordinarios, aunque es más general que éste y, potencialmente, puede probar que tiene un mayor ámbito de aplicación, en particular, en el campo de la clasificación de patrones y el proceso de información. En esencia, este marco proporciona un modo natural de tratar con problemas en los que la imprecisión aparece como consecuencia de la ausencia de criterios de pertenencia definidos nítidamente en vez de la presencia de variables aleatorias.

Empezaremos la discusión sobre conjuntos borrosos con algunas definiciones básicas.

2. Definiciones

Sea X un espacio de puntos (objetos), con un elemento genérico denotado por x . Así, $X = \{x\}$.

Un *conjunto (clase) borroso* A en X se caracteriza por una *función de pertenencia* $f_A(x)$ que asocia a cada punto² de X un número real del intervalo $[0, 1]$ ³, donde el valor $f_A(x)$ en x representa el "grado de pertenencia de x a A ". Así, cuanto más se aproxima $f_A(x)$ a la unidad, tanto mayor es el grado de pertenencia de x a A . Cuando A es un conjunto en el sentido ordinario del término, su función de pertenencia puede tomar los valores 0 y 1 solamente, con $f_A(x) = 1$ ó 0 según x pertenezca o no a A . De modo que, en este caso $f_A(x)$ se reduce a la conocida función característica del conjunto A . (Cuando sea necesario diferenciar entre estos conjuntos y los borrosos, los conjuntos con función característica bivaluada se denominarán *conjuntos ordinarios* o simplemente *conjuntos*).

Ejemplo. Sea X la recta real \mathbb{R}^1 y A un conjunto borroso de números mucho mayores que 1. Se puede dar una caracterización precisa, aunque subjetiva, de A especificando $f_A(x)$ como una función en \mathbb{R}^1 . Algunos valores representativos de dicha función podrían ser: $f_A(0) = 0$, $f_A(1) = 0$, $f_A(5) = 0,01$, $f_A(10) = 0,2$, $f_A(100) = 0,95$, $f_A(500) = 1$.

Debe observarse que, aunque la función de pertenencia de un conjunto borroso tiene cierto parecido con una función de probabilidad cuando X es un conjunto numerable (o una función de densidad de probabilidad cuando X es continuo), hay diferencias sustanciales entre ambos conceptos que iremos aclarando a medida que se establezcan las reglas de combinación de las funciones de pertenencia y sus propiedades básicas. De hecho, la noción de conjunto borroso es de naturaleza no estadística.

Comenzamos con algunas definiciones a propósito de los conjuntos borrosos que son extensiones obvias de las correspondientes en los conjuntos ordinarios.

Un conjunto borroso es *vacío* si y sólo si su función de pertenencia es idénticamente igual a cero en X .

²En general, el dominio de definición de $f_A(x)$ puede ser un subconjunto de X

³En un escenario más general, el rango de la función de pertenencia puede ser un conjunto parcialmente ordenado P adecuado. Para nuestro propósito es conveniente y suficiente limitar el rango de f al intervalo unidad. Si los valores de $f_A(x)$ se interpretan como valores de verdad, esto último se corresponde con una lógica multivaluada con un valor de verdad continuo en $[0, 1]$.

Dos conjuntos borrosos A y B son *iguales*, lo que escribimos $A = B$, si y sólo si $f_A(x) = f_B(x)$ para todo x de X . (En adelante, en lugar de $f_A(x) = f_B(x)$ para todo x de X , escribiremos simplemente $f_A = f_B$.)

El *complemento* de un conjunto borroso A se representa por A' y se define como

$$f_{A'} = 1 - f_A \quad (1)$$

Análogamente a los conjuntos ordinarios, la noción de inclusión juega un papel central en los conjuntos borrosos. Esta noción junto con las de unión e intersección se definen como sigue.

Inclusión. A está contenido en B (o su equivalente, A es un *subconjunto* de B , o A es *menor o igual que* B) si y sólo si $f_A \leq f_B$. En símbolos

$$A \subset B \Leftrightarrow f_A \leq f_B. \quad (2)$$

Unión. La *unión* de dos conjuntos borrosos A y B con funciones de pertenencia f_A y f_B , respectivamente, es un conjunto borroso C , escrito como $C = A \cup B$, cuya función de pertenencia se relaciona con las de A y B mediante

$$f_C(x) = \text{Max}[f_A(x), f_B(x)], \quad x \in X \quad (3)$$

o, de forma abreviada

$$f_C = f_A \vee f_B \quad (4)$$

Obsérvese que \cup tiene la propiedad asociativa, es decir, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Nota. Un modo más intuitivo de definir la unión es el siguiente: La unión de A y B es el menor de los conjuntos borrosos que contienen a A y a B . De modo más preciso, si D es un conjunto cualquiera que contiene a A y a B , contiene asimismo la unión de A y B .

Para ver que esta definición equivale a la dada en (3), observemos, primero, que el conjunto C así definido contiene a A y a B , ya que

$$\text{Max}[f_A, f_B] \geq f_A$$

y

$$\text{Max}[f_A, f_B] \geq f_B.$$

Por otro lado, si D es un conjunto borroso que contiene tanto a A como a B , entonces

$$f_D \geq f_A$$

$$f_D \geq f_B$$

y por tanto

$$f_D \geq \text{Max}[f_A, f_B] = f_C$$

lo que implica que $C \subset D$. Q.E.D.

La noción de intersección de conjuntos borrosos puede definirse de forma análoga. Concretamente:

Intersección. La *intersección* de dos conjuntos borrosos A y B con funciones de pertenencia f_A y f_B , respectivamente, es un conjunto borroso C , escrito como $C = A \cap B$, cuya función de pertenencia se relaciona con las de A y B mediante

$$f_C(x) = \text{Min}[f_A(x), f_B(x)], \quad x \in X \quad (5)$$

o, de forma abreviada

$$f_C = f_A \wedge f_B. \quad (6)$$

Como en el caso de la unión, es fácil mostrar que la intersección de A y B es el *mayor* conjunto borroso contenido a la vez en A y en B . Como en los conjuntos ordinarios, A y B son *disjuntos* si $A \cap B$ es vacío. También \cap , al igual que \cup , tiene la propiedad asociativa.

La intersección y la unión de dos conjuntos borrosos en \mathbb{R}^1 se ilustran en la Fig. 1. La función de pertenencia de la unión está formada por los segmentos de curva 1 y 2; la de la intersección por los segmentos 3 y 4 (línea gruesa).

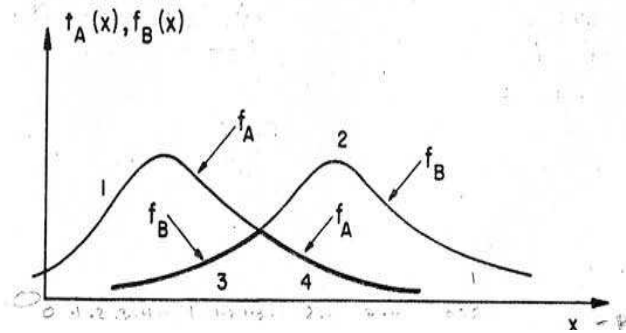


FIG. 1.⁴ Ilustración de la unión e intersección de conjuntos borrosos en \mathbb{R}^1

Nota. La noción de “pertenencia” juega un papel fundamental en los conjuntos ordinarios, no siendo así en el caso de los borrosos. Así, no es significativo decir que el punto x “pertenece” al conjunto borroso A salvo en el sentido trivial de que $f_A(x)$ sea positivo. Menos trivialmente, se pueden introducir dos niveles α y β ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > \beta$) y convenir que (1) “ x pertenece a A ” si $f_A(x) \geq \alpha$; (2) “ x no pertenece a A ” si $f_A(x) \leq \beta$; y (3) “ x tiene un status indeterminado en relación con A ” si $\beta < f_A(x) < \alpha$. Esto nos lleva a una lógica tri-valuada (Kleene, 1952) con tres valores de verdad: T ($f_A(x) \geq \alpha$), F ($f_A(x) \leq \beta$), y U ($\beta < f_A(x) < \alpha$).

⁴Nota del traductor: Las figuras son reproducción facsímil del original, por lo que se conserva el idioma original.

3. Algunas propiedades de \cup , \cap y complementación

Con las operaciones de unión, intersección y complementación definidas en (3), (5), y (1), es sencillo extender a los conjuntos borrosos muchas de las identidades básicas válidas en los ordinarios. Como ejemplo, tenemos

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (7)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (8)$$

Leyes distributivas

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad (9)$$

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \quad (10)$$

Estas y otras igualdades similares pueden establecerse en seguida comprobando que las relaciones correspondientes para las funciones de pertenencia de A , B y C son identidades. Por ejemplo, en el caso de la ley (7), tendremos

$$1 - \text{Max}[f_A, f_B] = \text{Min}[1 - f_A, 1 - f_B] \quad (11)$$

identidad fácilmente comprobable en los dos casos posibles : $f_A(x) < f_B(x)$ y $f_A(x) > f_B(x)$. De manera similar, en el caso de la expresión (10), la relación correspondiente en términos de f_A , f_B , y f_C es:

$$\text{Max}[f_C, \text{Min}[f_A, f_B]] = \text{Min}[\text{Max}[f_C, f_A], \text{Max}[f_C, f_B]] \quad (12)$$

que de nuevo es verificable considerando los seis casos posibles:

$$f_A(x) > f_B(x) > f_C(x), f_A(x) > f_C(x) > f_B(x), f_B(x) > f_A(x) > f_C(x) \\ f_B(x) > f_C(x) > f_A(x), f_C(x) > f_A(x) > f_B(x), f_C(x) > f_B(x) > f_A(x).$$

En esencia, los conjuntos borrosos forman un retículo distributivo con 0 y 1 (Birkhoff, 1948).

3.1. Una interpretación de la unión y la intersección

En el caso de los conjuntos ordinarios, un conjunto C expresado en términos de una familia de conjuntos $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ a través de los conectivos \cap y \cup , puede representarse por medio de un circuito de conmutadores $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, donde $A_i \cap A_j$ y $A_i \cup A_j$ corresponden a las combinaciones en serie y en paralelo de α_i y α_j respectivamente. En el caso de los conjuntos borrosos se puede hacer una interpretación análoga en términos de cribas. En concreto, representemos por $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, el valor que toma la función de pertenencia de A_i en x . Se asocia con $f_i(x)$ una criba $S_i(x)$ cuyas mallas son de tamaño $f_i(x)$. Entonces, $f_i(x) \vee f_j(x)$ y $f_i(x) \wedge f_j(x)$ corresponden a las combinaciones en paralelo y en serie de $S_i(x)$ y $S_j(x)$, respectivamente, tal como se muestra en la Fig. 2.

En general, una expresión bien-formada que incluya A_1, \dots, A_n, \cap y \cup corresponde a una red de cribas $S_1(x), \dots, S_n(x)$ que pueden obtenerse con una técnica convencional de síntesis de circuitos de conmutación. Veamos un ejemplo sencillo,

$$C = [(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \cup A_4 \quad (13)$$

corresponde a la red mostrada en Fig. 3.

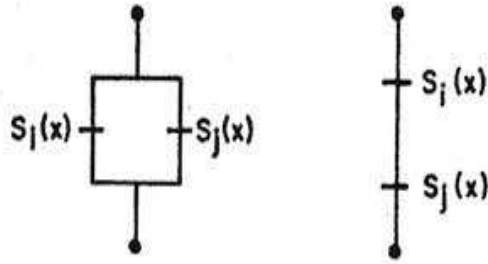


FIG. 2 Conexión de cribas en serie y paralelo que simulan \cup y \cap

Obsérvese que el tamaño de la malla de las cribas en red depende de x y que la red en conjunto es equivalente a una criba cuya malla tiene un tamaño $f_C(x)$

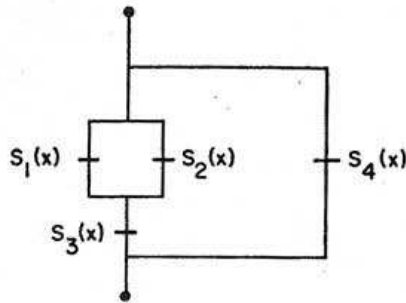


FIG. 3 Red de cribas para simular $\{[f_1(x) \vee f_2(x)] \wedge f_3(x)\} \vee f_4(x)$

4. Operaciones algebraicas con conjuntos borrosos

Además de las operaciones de unión e intersección, se pueden definir otras maneras de obtener combinaciones de conjuntos borrosos y relacionarlas con otro. Entre las más importantes se encuentran las siguientes.

Producto algebraico. El *producto algebraico* de A y B se escribe AB y se define a partir de las funciones de pertenencia de A y de B mediante la relación

$$f_{AB} = f_A f_B. \quad (14)$$

Claramente,

$$AB \subset A \cap B \quad (15)$$

*Suma algebraica.*⁵ La *suma algebraica* de A y B se escribe $A + B$ y se define como

$$f_{A+B} = f_A + f_B \quad (16)$$

a condición de que la suma $f_A + f_B$ sea menor o igual que la unidad. Así, a diferencia del producto algebraico, la suma algebraica cobra sentido sólo a condición de que $f_A(x) + f_B(x) \leq 1$ se satisfaga para todo x .

Diferencia absoluta. La *diferencia absoluta* de A y B se denota como $|A - B|$ y se define por

$$f_{|A-B|} = |f_A - f_B|$$

Obsérvese que en el caso de los conjuntos ordinarios $|A - B|$ se reduce al complemento relativo de $A \cap B$ respecto a $A \cup B$.

Combinación convexa Se entiende habitualmente por combinación convexa de dos vectores f y g una combinación lineal de f y g de la forma $\lambda f + (1 - \lambda)g$, con $0 \leq \lambda \leq 1$. Esta forma de combinar se puede generalizar a los conjuntos borrosos del modo siguiente.

Sean A, B y Λ tres conjuntos borrosos arbitrarios. La *combinación convexa* de A, B y Λ se denota por $(A, B; \Lambda)$ y se define por la relación

$$(A, B; \Lambda) = \Lambda A + \Lambda' B \quad (17)$$

donde Λ' es el complemento de Λ

Escrita con funciones de pertenencia, (17) tiene la forma

$$f_{(A,B;\Lambda)}(x) = f_\Lambda(x)f_A(x) + [1 - f_\Lambda(x)]f_B(x), \quad x \in X \quad (18)$$

Una propiedad básica de la combinación convexa de A, B, Λ es la que se expresa por

$$A \cap B \subset (A, B; \Lambda) \subset A \cup B \quad \text{para todo } \Lambda. \quad (19)$$

Esta propiedad es consecuencia inmediata de las desigualdades

$$\text{Min}[f_A(x), f_B(x)] \leq \lambda f_A(x) + (1 - \lambda)f_B(x) \leq \text{Max}[f_A(x), f_B(x)], \quad x \in X \quad (20)$$

que se cumplen para cualesquiera λ de $[0, 1]$. Es interesante observar que, dado un conjunto borroso C que verifique $A \cap B \subset C \subset A \cup B$, es posible hallar un conjunto borroso Λ tal que $C = (A, B; \Lambda)$. La función de pertenencia de dicho conjunto viene dada por

$$f_\Lambda(x) = \frac{f_C(x) - f_B(x)}{f_A(x) - f_B(x)}, \quad x \in X \quad (21)$$

⁵El dual del producto algebraico es la *suma* $A \oplus B = (A'B) = A + B - AB$. (Esto fue señalado por T. Cover). Obsérvese que para conjuntos ordinarios \cap y el producto algebraico son operaciones equivalentes, lo mismo sucede con \cup y \oplus .

Relación borrosa. El concepto de *relación* (el cual es una generalización del de *función*) tiene una extensión natural a los conjuntos borrosos y desempeña -tal como sucede en el caso de los conjuntos ordinarios- un papel importante en la teoría de tales conjuntos y sus aplicaciones. A continuación, definiremos únicamente la noción de relación borrosa y mencionaremos algunos conceptos relacionados.

De ordinario, una relación se define como un conjunto de pares ordenados (Halmos, 1960); e.g., el conjunto de todos los pares de números reales x e y tales que $x \geq y$. En el contexto de los conjuntos borrosos, una *relación borrosa en X* es un conjunto borroso en el espacio producto cartesiano $X \times X$. Por ejemplo, la relación $x \gg y$, $x, y \in \mathbb{R}^1$, puede verse como un conjunto borroso A en \mathbb{R}^2 , con una función de pertenencia, $f_A(x, y)$, que tiene los siguientes valores representativos (subjetivos): $f_A(10, 5) = 0$; $f_A(100, 10) = 0,7$; $f_A(100, 1) = 1$; etc.

Generalizando, se puede definir una *relación borrosa n -aria* en X como un conjunto borroso A en el espacio producto $X \times X \cdots \times X$. Para estas relaciones, la función de pertenencia es de la forma $f_A(x_1, \dots, x_n)$, donde $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$.

En el caso de las relaciones borrosas binarias, la *composición* de dos relaciones borrosas A y B se escribe $B \circ A$ y se define como una relación borrosa en X cuya función de pertenencia se relaciona con las de A y B por

$$f_{B \circ A}(x, y) = \text{Sup}_v \text{Min}[f_A(x, v), f_B(v, y)].$$

Obsérvese que la operación de composición verifica la propiedad asociativa

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

Conjuntos borrosos inducidos por aplicaciones. Sea T una aplicación de X sobre el espacio Y . Sea B un conjunto borroso en Y cuya función de pertenencia es $f_B(y)$. La aplicación inversa T^{-1} induce un conjunto borroso A en X cuya función de pertenencia se define como

$$f_A(x) = f_B(y), \quad y \in Y \quad (22)$$

para todos los x de X aplicados en y mediante T . Considérese el problema contrario donde A es un conjunto borroso en X y T , como antes, una aplicación de X sobre Y . La pregunta es: ¿Cuál es la función de pertenencia del conjunto borroso B en Y inducida por esta aplicación?

Si T no es uno a uno, aparece una ambigüedad cuando dos o más puntos distintos, digamos x_1 y x_2 , con grados de pertenencia diferentes en A se aplican sobre el mismo punto y de Y . En este caso la pregunta es: ¿Qué grado de pertenencia en B se debe asignar a y ?

Para zanjar esta ambigüedad, convenimos asignar a y el mayor de los dos grados de pertenencia. En general, la función de pertenencia para B se definirá mediante

$$f_B(y) = \text{Max}_{x \in T^{-1}(y)} f_A(x), \quad y \in Y \quad (23)$$

donde $T^{-1}(y)$ es el conjunto inicial de la aplicación T

5. Convexidad

Como se verá a continuación, la noción de convexidad puede extenderse fácilmente a los conjuntos borrosos conservando muchas de las propiedades que tiene en el contexto de los conjuntos ordinarios. Esta noción es particularmente útil en clasificación de patrones, optimización y problemas relacionados.

En adelante, en aras de la concreción asumimos que X es un espacio real euclidiano E^n .

5.1. Definiciones

Convexidad. Un conjunto borroso es *convexo* si y sólo si los conjuntos Γ_α definidos como

$$\Gamma_\alpha = \{x | f_A(x) \geq \alpha\} \quad (24)$$

son convexos para todo α en el intervalo $(0, 1]$.

Una definición alternativa y más directa de convexidad es la siguiente⁶: A es convexo si y sólo si

$$f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[f_A(x_1), f_A(x_2)] \quad (25)$$

para todo x_1 y x_2 de X y todo λ de $[0, 1]$. Adviértase que esta definición no implica que $f_A(x)$ deba ser una función convexa. Esto se ilustra en la Fig. 4 para el caso $n = 1$.

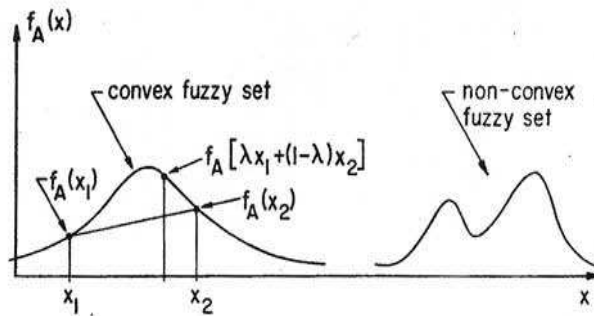


FIG. 4 Conjuntos borrosos convexo y no convexo en E^1

Para comprobar la equivalencia entre ambas definiciones obsérvese que si A es convexo en el sentido de la primera definición y $\alpha = f_A(x_1) \leq f_A(x_2)$, entonces $x_2 \in \Gamma_\alpha$ y $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$ por la convexidad de Γ_α . De lo cual

$$f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \alpha = f_A(x_1) = \text{Min}[f_A(x_1), f_A(x_2)].$$

Recíprocamente, si A es convexo en el sentido de la segunda definición y $\alpha = f_A(x_1)$, entonces Γ_α puede verse como el conjunto de puntos x_2 para los cuales $f_A(x_2) \geq f_A(x_1)$.

⁶Esta manera de expresar la convexidad fue sugerida al autor por su colega E. Berlekamp

En virtud de (25), cada punto de la forma $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, está también en Γ_λ y por tanto Γ_λ es un conjunto convexo. Q.E.D.

Una propiedad básica de los conjuntos borrosos convexos es la expresada por el

Teorema 5.1. *Si A y B son convexos, su intersección también lo es.*

Demostración. Sea $C = A \cap B$. Entonces

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = \text{Min}[f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2], f_B[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2]] \quad (26)$$

Ahora, como A y B son convexos

$$f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[f_A(x_1), f_A(x_2)] \quad (27)$$

$$f_B[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[f_B(x_1), f_B(x_2)]$$

y por lo tanto

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[\text{Min}[f_A(x_1), f_A(x_2)], \text{Min}[f_B(x_1), f_B(x_2)]] \quad (28)$$

o su equivalente

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[\text{Min}[f_A(x_1), f_B(x_1)], \text{Min}[f_A(x_2), f_B(x_2)]] \quad (29)$$

y así

$$f_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \text{Min}[f_C(x_1), f_C(x_2)]. \quad (30)$$

□

Acotación. Un Conjunto borroso A está *acotado* si y sólo si los conjuntos $\Gamma_\alpha = \{x | f_A(x) \geq \alpha\}$ están acotados para todo $\alpha > 0$; es decir, por cada $\alpha > 0$ existe un $R(\alpha)$ finito tal que $\|x\| \leq R(\alpha)$ para todo x de Γ_α .

Si A es un conjunto acotado, para cada $\epsilon > 0$ existe un hiperplano H tal que $f_A(x) \leq \epsilon$ para todos los x del lado de H que no contiene al origen. Considérese el conjunto $\Gamma_\alpha = \{x | f_A(x) \geq \alpha\}$. Por hipótesis, este conjunto está contenido en una esfera S de radio $R(\epsilon)$.

Lema 5.2. *Sea A un conjunto borroso acotado y sea $M = \text{Sup}_x f_A(x)$. (Nos referiremos a M como el grado maximal de A). Hay al menos un punto x_0 en el cual M es básicamente alcanzado en el sentido de que, para cada $\epsilon > 0$ todos los entornos esféricos de x_0 contienen puntos del conjunto $Q(\epsilon) = \{x | f_A(x) \geq M - \epsilon\}$.*

Demostración. ⁷ Considérese una sucesión anidada de conjuntos acotados $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, donde $\Gamma_n = \{x | f_A(x) \geq M - m/(n+1)\}$, $n = 1, 2, \dots$. Obsérvese que Γ_n no es vacío para cualquier n finito como consecuencia de la definición de M como $M = \text{Sup}_x f_A(x)$. (Asumimos que $M > 0$.)

⁷Esta prueba fue sugerida por A. Thomasian.

Sea x_n un punto de Γ_n elegido arbitrariamente, $n = 1, 2, \dots$. Entonces, x_1, x_2, \dots , es una sucesión de puntos en un conjunto cerrado acotado Γ_1 . Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, esta sucesión debe tener al menos un punto de acumulación, pongamos que x_0 , en Γ_1 . En consecuencia, cada entorno esférico de x_0 contiene infinitos puntos de la sucesión x_1, x_2, \dots , y, en particular, de la sucesión x_{N+1}, x_{N+2}, \dots , donde $N \geq M/\epsilon$. Como los puntos de esta subsucesión caen dentro del conjunto $Q(\epsilon) = \{x | f_A(x) \geq M - \epsilon\}$ el lema queda demostrado. \square

Convexidad estricta y fuerte. Un conjunto borroso es *estrictamente convexo* si los conjuntos Γ_α , $0 < \alpha \leq 1$ son estrictamente convexos (es decir, si el punto medio de dos puntos cualesquiera de Γ_α permanece en el interior de Γ_α). Nótese que esta definición se reduce a la de convexidad estricta para conjuntos ordinarios cuando A es uno de tales conjuntos.

Un conjunto borroso es *fuertemente convexo* si, para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 , y cualquier λ del intervalo $(0,1)$, se verifica que

$$f_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] > \text{Min}[f_A(x_1), f_A(x_2)]$$

Nota. La convexidad fuerte no implica la estricta, y viceversa. Asimismo si A y B son acotados, también lo es su unión y su intersección. De manera similar si A y B son estrictamente (fuertemente) convexos, su intersección es estrictamente (fuertemente) convexa.

Sea A un conjunto borroso convexo y $M = \text{Sup}_x f_A(x)$. Si A es acotado, tal como se muestra arriba, o bien M se alcanza para algún x , pongamos que para x_0 , o hay al menos un punto x_0 para el cual se alcanza básicamente M en el sentido de que, para cualquier $\epsilon > 0$, todos los entornos esféricos de x_0 contienen puntos en el conjunto $Q(\epsilon) = \{x | f_A(x) \geq M - \epsilon\}$. En particular, si A es fuertemente convexo y se alcanza x_0 , entonces x_0 es único. En efecto, si $M = f_A(x_0)$ y $M = f_A(x_1)$, con $x_0 \neq x_1$, entonces $f_A > M$ para $x = 0,5x_0 + 0,5x_1$, lo que contradice $M = \text{Max}_x f_A(x)$.

En general, denotaremos por $C(A)$ el conjunto de los puntos de X en los que se alcanza M . Nos referiremos a este conjunto como *núcleo* de A . En el caso de los conjuntos borrosos convexos, $C(A)$ verifica la propiedad siguiente.

Teorema 5.3. *SI A es un conjunto borroso convexo, su núcleo también es convexo.*

Demostración. Basta con probar que si M se alcanza básicamente en x_0 y x_1 , y $x_0 \neq x_1$, entonces se alcanza básicamente en todos los x de la forma $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

A tal fin, sea P un cilindro de radio ϵ cuyo eje es la recta que pasa por x_1 y x_2 . Sean x'_0 un punto de la esfera de radio ϵ con centro en x_0 y x'_1 un punto de una de igual radio y centrada en x_1 tales que $f_A(x'_0) \geq M - \epsilon$ y $f_A(x'_1) \geq M - \epsilon$. Entonces, debido a la convexidad de A , para cada punto u del segmento $x'_0x'_1$ tendremos que $f_A(u) \geq M - \epsilon$. Además, a causa de la convexidad de P , todos los puntos del segmento $x'_0x'_1$ estarán en P .

Sea x ahora un punto cualquiera del segmento x_0x_1 . La distancia de este punto al segmento $x'_0x'_1$ ha de ser menor o igual que ϵ , ya que $x'_0x'_1$ está en P . Consecuentemente,

una esfera de radio ϵ con centro en x contendrá al menos un punto del segmento $x'_0x'_1$ y por tanto contendrá al menos un punto, pongamos que w , en el cual $f_A(w) \geq M - \epsilon$. Esto confirma que M se alcanza básicamente en x y por tanto se demuestra el teorema. \square

Corolario 5.4. *Si $X = E^1$ y A es fuertemente convexo, M es alcanzado básicamente en un único punto.*

Sombra de un conjunto borroso. Sea A un conjunto borroso en E^n con función de pertenencia $f_A(x) = f_A(x_1, \dots, x_n)$. Por simplicidad, la noción de *sombra* (proyección) de A sobre un hiperplano se definirá en adelante para el caso especial en que H es un hiperplano de coordenadas, e.g., $H = \{x|x_1 = 0\}$.

Específicamente, la *sombra* de A sobre $H = \{x|x_1 = 0\}$ se define como el conjunto borroso $S_H(A)$ en E^{n-1} con $f_{S_H(A)}(x)$ dado por

$$f_{S_H(A)}(x) = f_{S_H(A)}(x_2, \dots, x_n) = \text{Sup}_{x_1} f_A(x_1, \dots, x_n).$$

Obsérvese que esta definición es consistente con (23)

Cuando A es un conjunto borroso convexo, la propiedad siguiente es una consecuencia inmediata de la definición de sombra: Si A es un conjunto borroso convexo, su sombra sobre un hiperplano es también un conjunto borroso convexo.

Una propiedad interesante de las sombras de dos conjuntos borrosos convexos es la expresada por la siguiente implicación

$$S_H(A) = S_H(B) \text{ para todo } H \Rightarrow A = B.$$

Para probar esta propiedad,⁸ basta con mostrar que si existe un punto, digamos x_0 , tal que $f_A(x_0) \neq f_B(x_0)$, entonces existe un hiperplano H tal que $f_{S_H(A)}(x_0^*) \neq f_{S_H(B)}(x_0^*)$, donde x_0^* es la proyección de x_0 sobre H .

Supongamos que $f_A(x_0) = \alpha > f_B(x_0) = \beta$. Como B es un conjunto borroso convexo, el conjunto $\Gamma_\beta = \{x|f_B(x) > \beta\}$ es convexo, y por tanto existe un hiperplano F soporte de Γ_β que pasa por x_0 . Sea H un hiperplano ortogonal a F , y x_0^* la proyección de x_0 sobre H . Entonces, dado que $f_B(x) \leq \beta$ para todo x de F , tenemos $f_{S_H(B)}(x_0^*) \leq \beta$. Por otra parte, $f_{S_H(A)}(x_0^*) \geq \alpha$. En consecuencia, $f_{S_H(B)}(x_0^*) \neq f_{S_H(A)}(x_0^*)$, y análogamente para el caso en que sea $\alpha < \beta$.

Una forma un tanto más general del aserto anterior es la siguiente: Sea A , pero no necesariamente B , un conjunto borroso convexo y sea $S_H(A) = S_H(B)$ para todo H . Entonces $A = \text{conv } B$, donde $\text{conv } B$ es el recubrimiento convexo de B , es decir, el menor de los conjuntos convexos que contienen a B . En general, $S_H(A) = S_H(B)$ para todo H implica $\text{conv } A = \text{conv } B$

Separación de conjuntos borrosos convexos. El teorema de la separación para conjuntos ordinarios convexos dice, en esencia, que si A y B son conjuntos convexos disjuntos, entonces existe un hiperplano separador H tal que A está a un lado de H y B en el otro.

⁸Esta demostración se basa en una idea sugerida por G. Dantzig para el caso en que A y B son conjuntos ordinarios convexos.

Es natural preguntar si este teorema se podría extender a los conjuntos borrosos convexos, sin requerir que A y B fueran disjuntos, ya que esta condición es demasiado restrictiva en el caso de los conjuntos borrosos. Resulta, como veremos a continuación, que la respuesta es sí.

Previamente, hay que dar algunas definiciones. Sean A y B dos conjuntos borrosos acotados y H una hipersuperficie en E^n definida por la ecuación $h(x) = 0$, de modo que todos los puntos para los que $h(x) \geq 0$ están en un lado de H y aquellos para los que es $h(x) < 0$ están al otro.⁹ Sea K_H un número que depende de H tal que $f_A(x) \leq K_H$ en un lado de H y $f_B(x) \leq K_H$ en el otro. Sea M_H el $\text{Inf}_H K_H$. Llamaremos *grado de separación de A y B por H* al número $D_H = 1 - M_H$.

En general, no tratamos con una hipersuperficie H dada, sino con una familia de hipersuperficies $\{H_\lambda\}$, con λ recorriendo E^m . El problema, entonces, es encontrar un miembro de esta familia que proporcione el grado más alto de separación.

Un caso especial de este problema se produce cuando los H_λ son hiperplanos en E^n , con λ en E^n . En este caso, definimos el *grado de separabilidad* de A y B por la relación

$$D = 1 - \bar{M} \quad (31)$$

donde

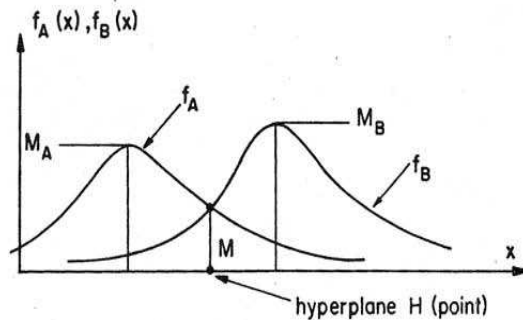
$$\bar{M} = \text{Inf}_H M_H \quad (32)$$

con el subíndice λ omitido por simplicidad.

Entre las diversas afirmaciones que pueden hacerse sobre D , la siguiente¹⁰ es, en realidad, una extensión del teorema de separación para conjuntos borrosos convexos.

Teorema 5.5. *Sean A y B conjuntos borrosos convexos acotados en E^n , con grados maximales M_A y M_B , respectivamente [$M_A = \text{Sup}_x f_A(x)$, $M_B = \text{Sup}_x f_B(x)$]. Sea M el grado maximal de la intersección $A \cap B$ ($M = \text{Sup}_x \text{Min}[f_A(x), f_B(x)]$). Entonces $D = 1 - M$.*

Nota. Lisa y llanamente, el teorema expresa que el grado más alto de separación entre dos conjuntos borrosos convexos A y B que se puede conseguir mediante un hiperplano en E^n es uno menos el grado maximal de la intersección $A \cap B$. Esto se ilustra en la Fig. 5 para el caso $n = 1$.



⁹Nótese que los conjuntos en cuestión tienen en común a H

¹⁰Esta frase se basa en una sugerencia de E. Berlekamp

FIG. 5 Ilustración del teorema de separación de conjuntos borrosos en E^1

Demostración. Conviene considerar por separado los dos casos siguientes:

(1) $M = \text{Min}(M_A, M_B)$ y (2) $M < \text{Min}(M_A, M_B)$. Repárese en que el segundo caso excluye $A \subset B$ o $B \subset A$.

Caso 1. Supongamos, por concreción, que $M_A < M_B$, de modo que $M = M_A$. Por la propiedad de los conjuntos acotados expuesta anteriormente existe un hiperplano H tal que $f_B(x) \leq M$ para todo x de un lado de H . En el otro lado de H , $f_A(x) \leq M$ ya que $f_A(x) \leq M_A = M$ para todo x .

Queda por ver que no existen un $M' < M$ y un hiperplano H' tales que $f_A(x) \leq M'$ en un lado de H' y $f_B(x) \leq M'$ en el otro lado.

Esto se sigue de inmediato de la observación siguiente. Supongamos que tale H' y M' existen, y que el núcleo de A (esto es, el conjunto de puntos en los que $M_A = M$ es básicamente alcanzado) está en el lado positivo de H' . Esto excluye que sea $f_A(x) \leq M'$ para todo x en el lado positivo de H' , y por tanto exige que $f_A(x) \leq M'$ para todo x en el lado negativo de H' , y $f_B(x) \leq M'$ para todo x en el lado positivo de H' . En consecuencia, en todos los x del lado positivo de H'

$$\text{Sup}_x \text{Min}[f_A(x), f_B(x)] \leq M'$$

e igualmente para todos los x del lado negativo de H' . Esto implica que, en todos los x de X , el $\text{Sup}_x \text{Min}[f_A(x), f_B(x)] \leq M'$, lo que contradice la hipótesis $\text{Sup}_x \text{Min}[f_A(x), f_B(x)] = M > M'$.

Caso 2. Considérense los conjuntos convexos $\Gamma_A = \{x | f_A(x) > M\}$ y $\Gamma_B = \{x | f_B(x) > M\}$. Estos conjuntos son no vacíos y disjuntos, de lo contrario habría un punto, u , tal que $f_A(u) > M$ y $f_B(u) > M$ y por tanto $f_{A \cap B}(u) > M$, que contradice la suposición de que $M = \text{Sup}_x f_{A \cap B}(x)$.

Como Γ_A y Γ_B son disjuntos, el teorema de separación de conjuntos ordinarios convexos nos dice que existe un hiperplano H tal que Γ_A está en un lado de H (supongamos que el lado positivo) y Γ_B en el otro (el lado negativo). Además, por la definición de Γ_A y Γ_B , para todos los puntos del lado negativo de H es $f_A(x) \leq M$, y para todos los del lado positivo $f_B(x) \leq M$.

De este modo, hemos visto que existe un hiperplano H que hace que el grado de separación entre A y B sea $1 - M$. El argumento dado en el caso 1 nos lleva a concluir que no puede haber un grado de separación entre A y B mayor que éste. Esto concluye la demostración del teorema. \square

El teorema de separación para conjuntos borrosos convexos parece ser particularmente relevante para el problema de discriminación de patrones. Su aplicación a esta clase de problemas así como a los de optimización será objeto de exploración en trabajos sucesivos sobre los conjuntos borrosos y sus propiedades.

Referencias

- [1] Birkhoff, G. (1948), "Lattice Theory" Am. Math. Soc. Colloq. Publ. , Vol. 25, New York.
- [2] Halmos, P.R. (1960), "Naive Set Theory", Van Nostrand, New York.
- [3] Kleene, S.C. (1952), "Introduction to Metamathematics", p. 334. Van Nostrand, New York.